

E. LEMOINE

Sur une détermination nouvelle simple de la direction des axes d'une conique

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1 (1901), p. 385-401

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__385_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'3]
**SUR UNE DÉTERMINATION NOUVELLE SIMPLE DE LA DIRECTION
 DES AXES D'UNE CONIQUE;**

PAR M. E. LEMOINE ⁽¹⁾.

Lorsque l'on veut déterminer la direction des axes d'une conique donnée par son équation générale en coordonnées cartésiennes obliques, on est conduit à des calculs classiques mais assez compliqués et le résultat final, par exemple la valeur explicite des tangentes des angles que font les axes de la conique avec l'axe des x , contient des radicaux et manque totalement d'élégance; en outre il ne correspond, pour l'esprit, à aucune image géométrique simple. Si la conique est donnée par son équation en coordonnées normales rapportée à un triangle de référence ABC, les calculs directs deviennent presque formidables et le résultat, inutilisable pratiquement; aussi ne les fait-on, pour ainsi dire, jamais.

Le but de la présente Note est de donner, précisément dans ce cas, une détermination imagée, symétrique, même *relativement* très simple dans sa généralité, si l'on considère que, dans le résultat, doivent figurer les six coefficients de l'équation de la conique. Les calculs, symétriques, dis-je, sont rapides, souvent immédiats.

LEMME. — *Si M est un point du cercle circonscrit au triangle ABC, les bissectrices des angles que la direction de la droite qui joint M à un sommet fait avec la*

(¹) Nous laissons à M. E. Lemoine la responsabilité de l'orthographe qu'il a adoptée.

direction du coté opposé, sont parallèles deux à deux, quel que soit le sommet.

Nous n'insisterons pas sur la facile démonstration de ce théorème connu sous plusieurs formes.

Il suit de là qu'à la direction de deux droites rectangulaires correspond un point M et un seul du cercle circonscrit. La détermination de ce point *correspondant à la direction des axes d'une conique*, va nous servir à résoudre le problème.

Je dirai simplement pour abrégé : point M correspondant à telles directions.

Nous indiquons ici une marche de calcul pour arriver à l'expression des coordonnées du point M. Soit

$$(1) \quad Lx^2 + my^2 + nz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

l'équation en coordonnées normales de la conique (ABC triangle de référence).

Je reporte la conique à CB axe des X, CA axe des Y; j'obtiens ainsi

$$(2) \quad AY^2 + BXY + CX^2 = 0$$

en négligeant les termes inutiles pour la détermination de la direction des axes.

Si j'appelle α l'angle que fait l'un quelconque des axes de la conique avec la direction CB de l'axe des x , j'ai par la formule classique

$$\tan 2\alpha = \sin C \frac{2C \cos C - B}{A - B \cos C + C \cos 2C}.$$

Le coefficient angulaire des droites qui font avec CB cet angle 2α sera $\frac{2C \cos C - B}{A - 2C \cos C}$; la droite passant par C et parallèle à cette direction aura donc pour équation en

coordonées cartésiennes

$$\frac{Y}{X} = \frac{2C \cos C - B}{A - 2C \cos C},$$

et en coordonées normales

$$\frac{x}{y} = \frac{2C \cos C - B}{A - 2C \cos C};$$

on en conclut que la droite menée par A et parallèle à cette direction aura pour équation

$$(3) \quad \frac{y}{x} = \frac{c(A - 2C \cos C)}{2C(b - a) \cos C + aB - bA}.$$

Cette droite coupe le cercle circonscrit au point M correspondant aux directions des axes de la conique, puisqu'elle fait avec BC l'angle 2α et que les bissectrices des angles que fait sa direction avec la direction BC, donneront alors les angles α que les directions des axes de la conique font avec BC.

En remplaçant dans (3) A, B, C par leurs valeurs en fonction de l, m, n, f, g, h que l'on trouve dans (2), on arrive finalement aux valeurs des coordonées du point M correspondant aux axes de la conique (1)

$$(4) \quad \frac{a}{l(b^2 - c^2) + a^2(m - n) + 2gac - 2hab}, \dots,$$

c'est le résultat cherché.

Remarques. — Le point M correspondant aux axes d'une conique circonscrite $fyx + gzx + hxy = 0$ est évidemment le quatrième point où elle coupe le cercle circonscrit $\frac{1}{gc - hb}$, etc.

Deux coniques concentriques, l'une inscrite, l'autre circonscrite, ont même point M correspondant à la direction de leurs axes qui est commune.

Voici quelques exemples pris sur des coniques remarquables étudiées dans la Géométrie du triangle.

1. Les coniques

$$H \sum a^2 x^2 \pm K \sum bc yz = 0, \quad \sum \frac{b^2 + c^2}{ax} = 0, \quad \sum \frac{\cos A}{a^2 x} = 0,$$

l'hyperbole circonscrite qui passe par les points de Brocard $\sum \frac{a^4 - b^2 c^2}{ax} = 0$, les coniques inscrites et circonscrites de Steiner, l'ellipse de Lemoine

$$\sum \sqrt{ax(2b^2 + 2c^2 - a^2)} = 0,$$

qui a pour foyers le baricentre G et le point K de Lemoine, touchant BC au pied sur BC de la simédiane partant de G dans le triangle BCG, etc., la conique

$$\sum a \cos A (a^2 x^2 - bc yz) = 0,$$

ont pour le point M correspondant à la direction de leurs axes le point de Steiner.

2. Les coniques

$$H \sum x^2 \pm K \sum yz \cos A = 0, \quad \sum \sqrt{x \cos A} = 0$$

qui a pour centre le point de Lemoine et touche les cotés aux pieds des hauteurs, la conique

$$\begin{aligned} & \sum a R \cos B \cos C (b \cos B + c \cos C) x^2 \\ & - \sum \cos A (a S \cos A + bc R \cos B \cos C) yz = 0 \end{aligned}$$

qui passe par les six points où les parallèles aux cotés menées par le centre du cercle ABC coupent les cotés,

ont pour point M correspondant à leurs axes le point :

$$\frac{a}{b^2 - c^2}, \text{ etc.}$$

Dans la plupart des cas qui se rencontrent en étudiant la Géométrie du triangle, on arrive, pour ainsi dire immédiatement, sans transformations, à la détermination des coordonnées de M sous une forme simple, en substituant dans les valeurs (4), ou plutôt dans l'une d'elles à cause de la symétrie, les coefficients de l'équation de la conique, mais quelquefois cependant la forme simple doit être dégagée. L'exemple le plus complexe que nous ayons rencontré, se trouve être la conique que nous venons de considérer et nous allons indiquer, pour lui, les transformations à opérer sur le résultat immédiat donné par les valeurs (4).

On trouve que le dénominateur est composé des quatre termes :

$$\begin{aligned} & a R \cos B \cos C (b \cos B + c \cos C) (b^2 - c^2), \\ & a^2 [b R \cos C \cos A (c \cos C + a \cos A) \\ & \quad - c R \cos A \cos B (a \cos A + b \cos B)], \\ & - 2ac \cos B (b S \cos B + ac R \cos C \cos A), \\ & 2ab \cos C (c S \cos C + ab R \cos A \cos B); \end{aligned}$$

le second peut s'écrire

$$a^2 \cos A \cdot R [bc (\cos^2 C - \cos^2 B) + a \cos A (b \cos C - c \cos B)];$$

ou, en remarquant que $\cos^2 C - \cos^2 B = \frac{b^2 - c^2}{4R^2}$ et que $b \cos C - c \cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$, il devient

$$a^2 R (b^2 - c^2) \cos A \left(\frac{bc}{4R^2} + \cos A \right).$$

Le troisième et le quatrième termes peuvent se grouper ainsi :

$$- 2abc S (\cos^2 B - \cos^2 C) - 2a^2 R \cos A \cos B \cos C (c^2 - b^2),$$

de sorte que le dénominateur devient successivement

$$(b^2 - c^2) \left[a R \cos B \cos C (b \cos B + c \cos C) \right. \\ \left. + a^2 R \cos A \left(\frac{bc}{4R^2} + \cos A \right) \right. \\ \left. + \frac{2abcS}{4R^2} + 2a^2 R \cos A \cos B \cos C \right],$$

$$(b^2 - c^2) \left[a R \cos B \cos C \sum a \cos A \right. \\ \left. + a R \cos A \left(\frac{abc}{4R^2} + a \cos A + a \cos B \cos C \right) + \frac{2S^2 R}{R^2} \right],$$

et en remarquant que

$$\sum a \cos A = \frac{2S}{R}, \quad \cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C = \frac{bc}{4R^2} :$$

$$2(b^2 - c^2) S \left(a \cos B \cos C + a \cos A + \frac{S}{R} \right)$$

ou

$$2(b^2 - c^2) S \left(\frac{abc}{4R^2} + \frac{S}{R} \right)$$

ou

$$\frac{4(b^2 - c^2)S^2}{R}.$$

Les valeurs (4) donent donc, finalement : $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc.

Si K et G sont le point de Lemoine et le baricentre, AK, BK, CK; AG, BG, CG coupent les cotés du triangle en six points qui apartiènent à la conique $\sum x^2 - \sum \frac{b^2 + c^2}{bc} yz = 0$ dont le centre O : $\frac{2a^2 + b^2 + c^2}{a}$, etc., est sur KG. On a

$$\frac{OG}{OK} = -\frac{1}{3}.$$

Les axes de cète conique ont aussi pour point M le point $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc.

Les axes de $\sum \frac{\cos A}{x} = 0$, qui a pour centre le point de Lemoine et les ellipses de Cesàro qui ont pour centres le point de Lemoine et sont telles que la somme des carrés des distances de chacun de leurs points aux côtés soit constante, ont encore le point $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc., pour point M correspondant à la direction de leurs axes.

3. a. Les coniques homofocales

$$\sum yz = 0 \quad \text{et} \quad \sum \sqrt{\frac{ax}{p-a}} = 0,$$

qui ont pour centres le point $p - a, p - b, p - c$;

b. La conique

$$\sum (p-a)yz = 0,$$

qui a pour centre le centre du cercle inscrit o ;

c. La conique

$$\sum ax^2 - \sum (b+c)yz = 0,$$

qui passe par les milieux des côtés et par les pieds des bissectrices intérieures et a pour centre le point : $\frac{2p+a}{a}$, etc. ;

d. La conique

$$\sum a(p-a)x^2 - \sum [bc + (p-b)(p-c)]yz = 0,$$

qui passe par les points où les tangentes au cercle inscrit parallèles aux côtés coupent ces côtés ;

e. La conique

$$\sum a(b+c)x^2 - 2 \sum (ap+bc)yz = 0,$$

qui est circonscrite à l'exagone formé par les six points

où les parallèles aux cotés menées par le centre du cercle inscrit, rencontrent les cotés, ont toutes, les directions de leurs axes qui correspondent au point $\frac{1}{b-c}$, etc.

Par transformation continue en A (voir *Nouvelles Annales*, p. 20-36; 1893), on voit que :

a'. Les coniques homofocales

$$-yz + zx + xy = 0, \quad \sqrt{\frac{ax}{p}} + \sqrt{\frac{-by}{p-c}} + \sqrt{\frac{-cz}{p-b}} = 0$$

qui ont pour centre le point : $p, p-c, p-b$;

b'. La conique

$$pyz - (p-c)zx + (p-b)xy = 0,$$

qui a pour centre le centre du cercle exinscrit o_a ;

c'. La conique

$$ax^2 - by^2 - cz^2 + (b+c)zx + (a-c)xy + (a-b)xy = 0,$$

qui passe par les milieux des cotés, par le pied de la bissectrice intérieure de A et par les pieds des bissectrices extérieures de B et de C et a pour centre le point : $\frac{b+c-a}{a}, \frac{2b+c-a}{b}, \frac{b-2c-a}{c}$;

d'. La conique

$$\begin{aligned} & apx^2 - b(p-c)y^2 + c(p-b)z^2 \\ & + [bc - (p-b)(p-c)]yz \\ & + [ac - p(p-b)]zx + [ab + p(p-c)]xy = 0 \end{aligned}$$

qui passe par les points où les tangentes au cercle exinscrit o_a parallèles aux cotés, coupent ces cotés;

e'. La conique

$$\begin{aligned} & a(b+c)x^2 + b(a-c)y^2 + c(a-b)z^2 \\ & - 2[a(p-a) - bc]yz \\ & - 2[b(p-a) + ca]zx - 2[c(p-a) + ab]xy = 0 \end{aligned}$$

qui est circonscrite à l'exagone formé par les six points où les parallèles aux cotés menées par le centre du cercle exinscrit o_a rencontrent les cotés; ont toutes, les directions de leurs axes qui correspondent au point : $\frac{1}{b-c}$,
 $-\frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$.

4. L'hyperbole de Kiepert

$$\sum \frac{b^2 - c^2}{ax} = 0;$$

L'hyperbole équilatère

$$\sum a^2(b^2 - c^2)x^2 = 0$$

qui passe par les centres des cercles tritangents, par le baricentre et a pour centre le point de Steiner; ont pour point M correspondant à la direction de leurs axes le point de Tarry.

5. *a.* M. G. de Longchamps a le premier étudié (Congrès de Nancy, A. F. A. S., 1886) une ellipse remarquable qui a pour centre le centre du cercle inscrit et passe par les pieds des bissectrices intérieures; elle a pour équation

$$\sum (p - a)x^2 - \sum ayz = 0;$$

quand M. de Longchamps veut déterminer les directions de ses axes qui sont celles de l'axe antiotique et de sa perpendiculaire, il y parvient d'une façon ingénieuse mais fort détournée et s'exprime ainsi : « *Cette proposition très simple ne se vérifie DIRECTEMENT que par des calculs très laborieux et que nous n'avons*

même pas poussés jusqu'au bout, par suite des complications qu'ils semblent présenter. » Cependant l'équation de la conique est simple, et on peut juger de ce que serait alors la complication des calculs pour certains des cas traités plus haut ! En appliquant les valeurs (4), on trouve presque immédiatement que le point M correspondant à la direction des axes de la conique a pour coordonnées : $\frac{a}{(b-c)(b+c-2a)}$, etc., c'est précisément le point M qui correspond aux directions de l'axe antiortique et de sa perpendiculaire.

Si l'on applique la transformation continue en A, on arrive immédiatement à la proposition suivante :

La conique

$$px^2 - (p-c)y^2 - (p-b)z^2 + ayz + bzx + cxy = 0$$

qui a pour centre le centre du cercle exinscrit o_a , passe par le pied de la bissectrice intérieure de A et par les pieds des bissectrices extérieures partant de B et de C, a pour point M correspondant à la direction de ses axes le point : $\frac{a}{(b-c)(b+c+2a)}$, $-\frac{b}{(c+a)(a+2b-c)}$, $\frac{c}{(a+b)(a-b+2c)}$, c'est-à-dire le point qui correspond à la direction de l'antibissectrice de A : $-x + y + z = 0$ et à sa perpendiculaire.

Cette conique jouit naturellement de toutes les propriétés énoncées par M. de Longchamps, mais modifiées suivant la loi de la transformation continue. Il y a aussi les coniques transformées en B et en C.

b. La conique inscrite

$$\sum \sqrt{x} = 0,$$

tangente aux cotés aux pieds des bissectrices intérieures,

a pour point M correspondant à la direction de ses axes le même point : $\frac{a}{(b-c)(b+c+2a)}$, etc.

Par transformation continue en A, on voit que la conique inscrite

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2xz + 2xy = 0,$$

tangente aux cotés au pied de la bissectrice intérieure partant de A et aux pieds des bissectrices extérieures partant de B et de C, a pour point M correspondant à ces axes le point :

$$\frac{a}{(b-c)(-b-c+2a)}, \quad \frac{b}{(a+c)(-c+a-2b)}, \\ \frac{c}{(a+b)(a-b-2c)}.$$

c. Pour l'hyperbole Γ_a :

$$(b^2 - c^2)yz + abxz - abxy = 0$$

du groupe $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ si souvent rencontré dans la Géométrie du triangle, le point M correspondant à la direction des axes, est le point $\cos B \cos C, -\cos B, -\cos C$ extrémité du diamètre du cercle circonscrit passant par A. Les axes font donc avec CB des angles de $45^\circ - \frac{B-C}{2}, 135^\circ - \frac{B-C}{2}$.

d. L'ellipse inscrite

$$\sum \sqrt{\frac{x}{a}} = 0$$

qui a pour foyers les points de Brocard et touche les cotés aux pieds des simédiannes, a pour point M correspondant à la direction de ses axes, le point :

$$\frac{a}{(a^2 - b^2 c^2)(b^2 - c^2)}, \text{ etc.}$$

e. La conique

$$L(bx + ay)(cx + az) + M(cy + bz)(ay + bx) \\ + N(az + cx)(bz + cy) = 0$$

a pour point M correspondant à la direction de ses axes

le point : $\frac{a}{Lbc(b^2 - c^2) + a^3(Mc - Nb)}$, etc.

f. La conique

$$ayz(-La + Mb + Nc) + bzx(La - Mb + Nc) \\ + cxy(La + Mb - Nc) = 0$$

a pour point M correspondant à la direction de ses axes

le point : $\frac{a}{Mb - Nc}$, etc.

Si l'on employait les coordonnées baricentriques, on verrait que, à la direction des axes de la conique

$$l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0,$$

correspond le point M dont les coordonnées baricentriques sont :

$$\frac{1}{l(b^2 - c^2) + mb^2 - nc^2 + 2gc^2 - 2hb^2}, \text{ etc.},$$

ou

$$\frac{1}{b^2(l + m - 2h) - c^2(l + n - 2g)}, \text{ etc.}$$

6. On voit sans multiplier davantage ces exemples que la détermination de la direction des axes des coniques remarquables, revient à placer des points remarquables sur le cercle circonscrit, points qui ont, pour la plupart, été déjà étudiés dans la Géométrie du triangle et que cète détermination se présente, par la méthode que nous venons d'exposer, dans des conditions de simplicité, de simétrie et d'élégance qu'èle n'avait pas jusqu'ici.

Nous profitons de l'occasion de cète Note pour donner quelques propriétés que nous croyons nouvelles du point $\frac{1}{b-c}$, etc., et de ses transformés continus rencontrés ici come points M correspondant à la direction des axes de nombreuses coniques remarquables.

Nous apelons d, d_a, d_b, d_c les distances du centre du cercle circonscrit aus centres des cercles tritangents;

M étant un point du plan, nous convenons que AM, BM, CM auront le même signe que les coordonées normales du point M.

a. Si M est le point $\frac{1}{b-c}$, etc., on a :

$$MA = \frac{R}{d} (b - c).$$

b. Donc :

$$MA + MB + MC = 0.$$

c. MA, MB, MC coupent respectivement BC, CA, AB en trois points situés sur la droite $\sum x(b+c) = 0$ parallèle à l'axe antiortique et à une distance de cet axe égale à $\frac{Rr}{d}$, tiers de la distance du centre du cercle inscrit à l'axe antiortique.

La transformation continue en A montre que :

a'. Si M_a est le point $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$, on a

$$M_a A = \frac{R}{d_a} (b - c),$$

$$M_a B = \frac{R}{d_a} (c + a),$$

$$M_a C = -\frac{R}{d_a} (a + b).$$

b'. Donc :

$$M_a A + M_a B + M_a C = 0.$$

c'. M_aA , M_aB , M_aC coupent respectivement BC , CA , AB en trois points situés sur la droite

$$x(b+c) + y(a-c) + z(a-b) = 0,$$

parallèle à l'antibissectrice $-x + y + z = 0$ de A et à une distance $\frac{Rr_a}{d_a}$ de cète droite, tiers de la distance du centre du cercle exinscrit o_a à cète antibissectrice.

d. Lorsque le point M que l'on trouve par notre méthode est un point déjà étudié de la Géométrie du triangle, il n'y a qu'à le construire par le moyen géométrographique, c'est-à-dire le plus simple que l'on connaisse, à le joindre à un sommet du triangle et à mener les bissectrices des angles que cète droite fait avec le côté opposé au sommet choisi : quand le point M n'est pas connu, on en fait l'étude et la construction par les moyens ordinaires de la Géométrie du triangle, mais nous croyons utile de faire remarquer qu'on trouve quelquefois une solution élégante par l'emploi du théorème très connu suivant :

Si une droite $Ax + By + Cz = 0$ coupe les côtés du triangle ABC en A' , B' , C' les courbes $B'C'A$, $C'A'B$, $A'B'C$ se coupent en un point P du cercle circonscrit dont les coordonnées sont :

$$\frac{a}{A(Bc - Cb)}, \frac{b}{B(Ca - Ac)}, \frac{c}{C(Ab - Ba)}.$$

On identifie les coordonnées du point P avec celles du point M et l'on profite de l'indétermination du problème (puisque M appartient au cercle circonscrit) pour choisir le mieux possible celles des valeurs de A , B , C qui donnent une droite connue ou facile à construire.

7. Les exemples précédents que nous avons pris pour ainsi dire au hasard de la rencontre de coniques remar-

quables dans nos Mémoires sur la Géométrie du triangle, montrent que les points de Steiner; de Tarry; les points $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc.; $\frac{1}{b - c}$, etc., et ses transformés continus; le point $\frac{a}{(b - c)(b + c + 2a)}$, etc., et ses transformés continus; le point $\frac{a}{(b^2 - c^2)(a^4 - b^2 c^2)}$, etc., se rencontrent souvent parmi les points M correspondants à la direction des axes des coniques remarquables. Pour les points de Steiner et de Tarry qui ont été suffisamment étudiés et pour le point $\frac{a}{(b - c)(b + c - 2a)}$, etc., correspondant à la direction de l'axe antiortique et à la direction perpendiculaire laquelle (voir A. F. A. S., Congrès de Paris, 1900, *Suite de théorèmes et de résultats concernant la Géométrie du triangle*, A. 9) se détermine avec la plus extrême simplicité géométrographique, nous n'ajouterons rien, mais pour les points $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc., $\frac{1}{b - c}$, etc., qui se trouvent cependant à chaque instant dans les études sur les points, droites, etc., remarquables du triangle nous croyons qu'on ne les a guère étudiés à part et nous devons indiquer quelques constructions.

a. On peut construire le point $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc., en se servant du théorème que nous venons de donner 6. d., la droite à choisir est alors la droite de Lemoine $\sum \frac{x}{a} = 0$. On conduit ainsi la construction.

D'un rayon quelconque ρ je trace les trois cercles $A(\rho)$, $B(\rho)$, $C(\rho)$ ($3C_1 + 3C_3$), puis les intersections de deux d'entre eux avec le troisième ($4R_1 + 2R_2$) qui placent le centre O du cercle circonscrit à ABC; je trace ce cercle ($2C_1 + C_3$); je fais du côté de AB opposé à C et en me servant des trois cercles $A(\rho)$, $B(\rho)$, $C(\rho)$

(400)

les angles $BAC_1 = ABC_1 = C(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 2C_2)$;
 AC_1 et BC_1 coupent BC et CA en A' , B' ; $A'B'$ que
je ne trace pas, serait la droite de Lemoine. Je trace
maintenant le cercle circonscrit au triangle $A'B'C$
 $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$, il coupe le cercle ABC au
point cherché.

Op. : $(12R_1 + 6R_2 + 14C_1 + 10C_3)$;

Simplicité : 42; Exactitude : 26; 6 droites, 10 cercles.

Je pourrais économiser $(C_1 + C_3)$ si je me servais de
deux compas.

Cette construction est assez simple, mais ce n'est pas
la construction *géométrographique* qui dérive du téo-
rème suivant que croyons nouveau :

Si N est le point de Tarry et G le baricentre,
la droite NG coupe le cercle circonscrit au point
 $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc.

Je prends dans le compas, en mettant la pointe en B,
la longueur $BC = a$ du plus grand coté du triangle et je
trace $B(a)$ $(2C_1 + C_3)$; je trace $C(a)$, $A(a)$ $(2C_1 + 2C_3)$;
puis par deux des intersections d'un de ces cercles avec
les deux autres $(4R_1 + 2R_2)$, je place le centre O du
cercle circonscrit et je trace ce cercle $(2C_1 + C_3)$ qui
coupe en B_1 , C_1 le cercle ABC ; je trace B_1C_1 $(2R_1 + R_2)$
qui coupe BC en A_2 ; je trace AA_2 $(2R_1 + R_2)$ qui
coupe le cercle ABC au point R de Steiner; je trace
 RO $(2R_1 + R_2)$ qui place le point N de Tarry sur le
cercle circonscrit. Je place G en traçant deux mé-
dianes $(4R_1 + 2R_2)$ puisque les milieux de deux cotés
ont été marqués pour placer O; je trace GN $(2R_1 + R_2)$
qui coupe le cercle ABC au point cherché.

Op. : $(16R_1 + 8R_2 + 6C_1 + 4C_3)$;

Simplicité : 34; Exactitude : 22; 8 droites, 4 cercles.

Remarque. — La droite GN est parallèle à la droite de de Longchamps $\sum a^3 x = 0$ et a pour point à l'infini $\frac{b^2 - c^2}{a}$, etc.

b. Le point $\frac{1}{b-c}$, etc., se construit facilement soit avec le théorème que nous avons donné (*voir* plus haut 6. a.), soit avec l'autre théorème signalé (*voir* 6. d.) au moyen de la droite $\sum a^2 x = 0$, soit en remarquant que le rapport de ses distances à BC et à AC est $\frac{b-a}{b-c}$, ce qui donne un lieu de ce point, puis prenant l'intersection de ce lieu avec le cercle ABC; mais je crois que la véritable construction géométrique est encore à trouver et je n'ai pas analysé ces constructions.

c. Le point $\frac{a}{(b^2 - c^2)(b^2 c^2 - a^4)}$, etc., correspondant à la direction des axes, connue *a priori*, de la conique $\sum \sqrt{\frac{x}{a}} = 0$ se construit également au moyen du théorème donné (6. d.) en employant la droite qui joint les points de Brocard.