

AUDIBERT

**Certificats d'études supérieures des facultés
des sciences. Solution d'une épreuve
pratique de mécanique rationnelle
(Toulouse, juillet 1900)**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 321-323

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__321_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES
DES FACULTES DES SCIENCES.**

**SOLUTION D'UNE ÉPREUVE PRATIQUE DE MÉCANIQUE
RATIONNELLE (TOULOUSE, JUILLET 1900);**

PAR M. AUDIBERT.

Calculer l'attraction newtonienne d'un solide homogène limité par un paraboloïde de révolution et par un plan perpendiculaire à l'axe sur un point matériel situé au foyer de la parabole génératrice.

Soit AB la trace du plan sécant qui limite le segment. On donne le paramètre p de la parabole,

l'angle $\text{AFH} = \alpha$, la densité ρ du parabolöide, le coefficient μ d'attraction.

Pour quelle valeur de l'angle α l'attraction du segment sur le foyer est-elle nulle?

L'équation polaire de la génératrice, le pôle étant en F, est

$$r = \frac{p}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

L'élément de volume est

$$r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\omega;$$

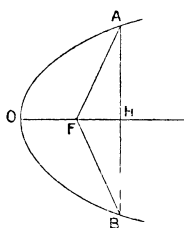
il exercera sur F une attraction dont la composante suivant l'axe sera

$$\mu \rho \sin \theta \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\omega;$$

celle de l'anneau matériel élémentaire qu'il détermine par une rotation de 2π autour de l'axe sera

$$2\pi \mu \rho \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, dr.$$

En laissant θ constant, si l'anneau élémentaire est situé à l'intérieur du cône AFB, le rayon vecteur r



variera de zéro à $\frac{p}{2} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \frac{\cos \alpha}{\cos \theta}$ et dans le reste du solide,

en dehors du cône, de zéro à $\frac{p}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}.$

L'action totale du segment est égale à la somme des deux intégrales

$$I_1 = 2\pi\mu_0 p \int_0^\alpha \frac{\cos \alpha}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin \theta \, d\theta = 2\pi\mu_0 p \cos \alpha,$$

$$I_2 = 2\pi\mu_0 p \int_\alpha^\pi \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin \theta \cos \theta \, d\theta$$

$$= -2\pi\mu_0 p \left(1 + \cos \alpha + 2 \log \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$I_1 - I_2 = -2\pi\mu_0 p \left(1 + 2 \log \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Cette attraction sera nulle pour

$$\log \sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad \frac{\alpha}{2} = 37^\circ 20' 21''.$$

En adoptant les coordonnées cartésiennes, l'origine étant au sommet du paraboloïde, on aurait à intégrer

$$2\pi\mu_0 p \left\{ \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2} \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \right)^2} dx \left(x - \frac{p}{2} \right) \int_0^{(2px)^{\frac{1}{2}}} \frac{y \, dy}{\left[y^2 + \left(x - \frac{p}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \left. - \int_0^{\frac{p}{2}} dx \left(\frac{p}{2} - x \right) \int_0^{(2px)^{\frac{1}{2}}} \frac{y \, dy}{\left[y^2 + \left(\frac{p}{2} - x \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Le calcul conduit au même résultat.