

CALLOT

Concours général de mathématiques spéciales de 1900

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 31-34

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__31_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DE 1900.

SOLUTION PAR M. CALLOT,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Carnot.

On considère les paraboloides Π représentés en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\frac{y^2}{p + \lambda} + \frac{q + \lambda}{z^2} - 2x - \lambda = 0, \quad .$$

dans laquelle p, q sont des constantes et λ un paramètre variable, et l'on propose d'étudier la surface Σ , enveloppe des plans polaires P par rapport aux paraboloides W d'un point donné A .

1° La surface Σ est de la troisième classe, et chaque plan polaire touche cette surface en tous les points d'une droite G .

2° Les droites G sont tangentes à une courbe gauche Γ du troisième ordre; elles admettent un cône directeur C du deuxième degré.

3° La section de la surface Σ par un plan tangent, c'est-à-dire par un plan polaire P , se compose d'une droite G et d'une conique. Dédurre de là le degré de la surface Σ .

4° Chaque droite C est le lieu des pôles d'un plan Q par rapport aux paraboloides Π . Chaque plan Q est perpendiculaire à la droite G correspondante.

5° En supposant que G décrive la surface Σ , on demande l'enveloppe C_1 des plans Q qui correspondent aux diverses droites G .

On indiquera les relations qui lient l'enveloppe G avec les paraboloides Π et avec le cône C .

Remarquons que les paraboloides Π forment un système homofocal, c'est-à-dire font partie d'un faisceau tangentiel déterminé par l'un d'eux et l'ombilicale. Ce faisceau pourra donc se déduire dualistiquement d'un faisceau ponctuel de quadriques.

1° On sait que le lieu des pôles d'un plan R par rapport aux quadriques d'un faisceau ponctuel est une cubique gauche Γ_1 . Corrélativement l'enveloppe des plans polaires P du point A par rapport au faisceau des paraboloides Π sera une surface de la troisième classe Σ . A deux points infiniment voisins de Γ_1 correspondront

deux plans tangents infiniment voisins de Σ . On voit donc qu'à toute tangente à Γ_1 correspond une génératrice G de Σ . A tout point μ de G correspond un plan π à Γ_1 qui passe par une tangente fixe, quand μ décrit G . Le plan tangent en μ correspond au point de contact de π . Il est donc le même tout le long de G .

2° A deux tangentes infiniment voisines à Γ_1 correspondent deux génératrices infiniment voisines de Σ . Or les deux tangentes définissent un plan osculateur à Γ_1 , auquel correspond le point de rencontre de deux génératrices; celles-ci ont donc une enveloppe. Or, comme par tout point de l'espace on peut mener trois plans osculateurs à Γ_1 , on voit que dans tout plan il y aura trois points de l'enveloppe des droites G . Donc cette enveloppe est une cubique gauche Γ .

Nous verrons plus tard que les droites G admettent un cône directeur du second degré.

3° Un plan tangent à Σ correspond à un point m de Γ_1 et aux points de la surface situés dans ce plan les plans tangents à Γ_1 menés par m . Or ces plans enveloppent le cône de sommet m qui s'appuie sur Γ_1 . Ce cône étant du deuxième degré, on voit que le plan tangent à Σ la coupe suivant une conique. Comme le plan est tangent tout le long d'une droite, la section se compose d'une droite et d'une conique. Il en résulte que Σ est du quatrième ordre.

4° A toute droite G correspond une tangente δ à Γ_1 ; or, δ étant donnée, il existe dans le plan R un point I tel que tous ses plans polaires, par rapport au faisceau ponctuel considéré au début, passent par δ . On voit donc qu'il existe bien un plan Q correspondant à I , tel que tous ses pôles par rapport aux paraboloïdes Π soient sur G . Comme I est dans le plan R , tous les plans Q passent par le point A .

La droite G doit contenir des pôles de Q par rapport à toutes les quadriques du faisceau tangentiel donné; en particulier elle contiendra leur pôle par rapport à l'ombilicale. Elle lui est donc perpendiculaire.

5° Il en résulte que Q enveloppe le cône C , de sommet A supplémentaire du cône directeur C de la surface Σ . Tous les plans tangents à C sont parallèles à des plans tangents à Σ . Donc chaque génératrice de C est perpendiculaire à un plan polaire δ . Elle est donc perpendiculaire à sa conjuguée par rapport à un des paraboloides Π . Or le lieu des droites qui passent par A , et qui sont perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à des quadriques homofocales, est le cône de Chasle de sommet A . Donc le cône G est du second degré, et par suite aussi le cône C .