

G. FONTENÉ

Sur un contour hexagonal variable circonsrit à une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 319-321

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__319_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L²14 a]

**SUR UN CONTOUR HEXAGONAL VARIABLE
CIRCONSCRIT A UNE QUADRIQUE;**

PAR M. G. FONTENÉ.

En étudiant de nouveau la question que j'avais proposée dans les *Nouvelles Annales* (1899, p. 485) pour le premier concours de 1900, j'ai obtenu ce résultat :

Si trois tangentes α , β , γ en trois points A, B, C d'une sphère font, avec les tangentes en A, B, C au cercle ABC des angles λ , μ , ν qui vérifient la relation

$$\cos \lambda + \cos \mu + \cos \nu = \cos (\lambda + \mu + \nu),$$

la sphère étant orientée, le cercle ABC étant dirigé,

les tangentes α, β, γ étant dirigées convenablement, il existe une série indéfinie de contours hexagonaux $A'B'C'A''B'C''A'$ dont les couples de sommets opposés sont respectivement sur les droites α, β, γ , et qui sont circonscrits à la sphère, les points de contact étant dans un même plan pour chacun des trois contours quadrangulaires $A'A''B'B''A'$,

La démonstration peut se faire ainsi. Le pôle du plan ABC étant D, si l'on prend comme tétraèdre de référence le tétraèdre ABCD, la quadrique supposée quelconque a pour équation

$$Ayz + Bzx + Cxy - t^2 = 0,$$

et les équations des tangentes α, β, γ peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{t}{\sqrt{ABC \tan \lambda}} &= \frac{y}{B} = \frac{z}{-C}, \\ \frac{t}{\sqrt{ABC \tan \mu}} &= \frac{z}{C} = \frac{x}{-A}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si l'on considère le contour ouvert $A'B''C'A''$, et si l'on écrit que l'une des huit relations homographiques qui ont lieu entre A' et A'' est involutive, comme cela doit avoir lieu, on obtient, avec $\varepsilon = \pm 1$, ... ,

$$\varepsilon \cos \lambda + \varepsilon' \cos \mu + \varepsilon'' \cos \nu = \cos(\lambda + \mu + \nu);$$

on doit d'ailleurs prendre

$$\varepsilon \varepsilon' \varepsilon'' = +1,$$

l'hypothèse contraire donnant des solutions parasites. En remplaçant au besoin λ et μ par $\lambda + \pi$ et $\mu + \pi$, on a d'ailleurs $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = +1$, par suite $\varepsilon'' = +1$.

Si G_1 et G_2 sont les génératrices en A de la quadrique, le rapport anharmonique (G_1, G_2, α, AD) est

celui de quatre plans $\frac{t}{y} = m$, m ayant des valeurs proportionnelles à i , $-i$, $\text{tang } \lambda$, ∞ . Donc, si la quadrique est une sphère, λ est l'angle indiqué dans l'énoncé donné au début.

Voici une conséquence :

La quadrique étant donnée, soient α , β , γ trois tangentes dont les points de contact sont A, B, C, telles qu'un hexagone gauche circonscrit à la quadrique puisse varier en ayant ses couples de sommets sur ces droites. Si l'on considère les trois hyperboloïdes qui sont circonscrits à la quadrique le long de la conique ABC, et qui contiennent respectivement les droites α , β , γ , on peut remplacer α par une génératrice quelconque de même système du premier hyperboloïde, etc. On peut remplacer simultanément α , β , γ par trois génératrices appartenant à l'autre système.