

H. LAURENT

Usage des formes quadratiques dans la théorie des équations

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 313-319

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__313_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B10]

USAGE DES FORMES QUADRATIQUES DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS:

PAR M. H. LAURENT.

Désignons par $a_1, a_2, \dots, a_n$ les racines d'une équation de degré n à coefficients réels

$$f(x) = 0,$$

et par $s_0, s_1, s_2, \dots$ les sommes

$$\sum a^0, \quad \sum a, \quad \sum a^2, \quad \dots$$

Considérons la forme quadratique

$$\begin{aligned} & \varphi(a_1)(z_0 + z_1 a_1 + \dots + z_{n-1} a_1^{n-1})^2 \\ & + \dots\dots\dots \\ & + \psi(a_n)(z_0 + z_1 a_n + \dots + z_{n-1} a_n^{n-1})^2 = V. \end{aligned}$$

Si les racines $a_1, a_2, \dots$ sont toutes réelles, et si la fonction $\varphi(x)$ est réelle, V sera tout décomposé en n carrés réels; mais si, parmi les racines a , il s'en trouve

d'imaginaires, on pourra encore décomposer V en n carrés réels, mais une petite transformation sera nécessaire. Or, je dis qu'à *chaque couple de racines imaginaires conjuguées correspondront deux carrés de signes contraires réels*.

Supposons, en effet, a_1 et a_2 imaginaires conjuguées et soit

$$\varphi(a_1) = P + Q\sqrt{-1};$$

on aura

$$\varphi(a_2) = P - Q\sqrt{-1}.$$

Soit

$$z_0 + a_1 z_1 + \dots + a_1^{n-1} z_{n-1} = X + Y\sqrt{-1};$$

on aura

$$z_0 + a_2 z_1 + \dots + a_2^{n-1} z_{n-1} = X - Y\sqrt{-1},$$

et la somme de nos deux premiers carrés sera

$$\begin{aligned} & (P + Q\sqrt{-1})(X + Y\sqrt{-1})^2 \\ & + (P - Q\sqrt{-1})(X - Y\sqrt{-1})^2 = P(X^2 - Y^2) - 4QXY, \end{aligned}$$

ce qui est bien une somme de carrés réels, l'un positif, l'autre négatif.

En second lieu, les carrés dont la somme fait V ne seront distincts que si les racines de $f = 0$ sont inégales, et V sera la somme de μ carrés distincts si les racines de f se réduisent à μ distincts, c'est-à-dire si l'on compte pour *une* un ensemble de k racines égales.

Ceci posé, nous allons tirer de la remarque précédente une foule de conséquences plus ou moins intéressantes.

1. Supposons $\varphi(a) = 1$; on aura

$$V = \sum (z_0 + a_i z_1 + \dots + a_i^{n-1} z_{n-1})^2 = \sum z_i z_j S_{i+j}.$$

Soient

ϖ le nombre des racines positives de $f = 0$;

ν le nombre des racines négatives;

$2I$ le nombre des racines imaginaires, abstraction faite de leur degré de multiplicité;

$r = \varpi + \nu$ le nombre des racines réelles;

P le nombre des carrés positifs;

N le nombre des carrés négatifs de $V = \sum z_i z_j S_{i+j}$ décomposé en carrés réels.

On aura

$$\begin{aligned} r + I &= P, & I &= N, \\ r &= P - N. \end{aligned}$$

Et si l'on forme le polynome en x

$$\begin{vmatrix} s_0 - x & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 - x & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = X,$$

en appelant ν le nombre de ses variations, on aura

$$\nu = P,$$

et N sera égal à $n - P - \omega$, ω désignant le nombre des racines nulles de $X = 0$.

2. Prenons $\varphi = x - a$, on aura

$$\begin{aligned} V &= \sum (x - a_i)(z_0 + a_i z_1 + \dots + a_i^{n-1} z_{n-1})^2 \\ &= \sum z_i z_j (x s_{i+j} - s_{i+j+1}). \end{aligned}$$

Soient toujours

P le nombre des carrés positifs réels;

N le nombre des carrés négatifs de V ;

ρ le nombre des racines de $f(x) = 0$ supérieures à x ;
 ρ' le nombre des racines de $f(x) = 0$ inférieures à x .

On aura

$$\begin{aligned} N &= I + \rho, & P &= I - \rho', \\ N - P &= \rho - \rho', \end{aligned}$$

et, si l'on appelle $P_1, N_1, \rho_1, \rho'_1$ ce que deviennent P, N, ρ, ρ' quand on change x en x_1 ,

$$N_1 = I + \rho_1, \quad P_1 = I - \rho'_1,$$

et, par suite,

$$P - P_1 = \rho' - \rho'_1;$$

donc le nombre des racines de $f' = 0$ comprises entre x et x_1 est la différence entre le nombre des carrés positifs que présentent les polynômes $V(x)$ et $V(x_1)$ ou, si l'on veut, la différence du nombre de variations des polynômes en t

$$\begin{vmatrix} s_0x - s_1 - t & s_1x - s_2 & \dots & s_{n-1}x - s_n \\ s_1x - s_2 & s_2x - s_3 - t & \dots & s_nx - s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

lorsque l'on suppose successivement $x = x, x = x_1$,
 théorème analogue au théorème de Sturm, et que j'ai
 donné dans mon *Traité d'Algèbre*.

3. Supposons toujours $\varphi = (x - a)$ et

$$\begin{aligned} V &= \sum (x - a_i)(z_0 + \dots + z_{n-1}a_i^{n-1})^2 \\ &= \sum z_i z_j (x s_{i+j} - s_{i+j+1}); \end{aligned}$$

le discriminant de V pourra se calculer de deux manières :

1° Soit directement, et ce sera

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0x - s_1 & s_1x - s_2 & \dots & s_{n-1}x - s_n \\ s_1x - s_2 & s_2x - s_3 & \dots & s_nx - s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix};$$

2° Soit en observant que le discriminant de

$$\sum (x - a_i) X^2$$

est égal à $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ multiplié par le carré du déterminant de la substitution

$$X_1 = z_0 + a_1 z_1 + \dots + a_1^{n-1} z_{n-1},$$

.....,

qui est égal à

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = D,$$

en sorte que

$$\Delta = D(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

il en résulte que si D est différent de zéro, $\Delta = 0$ sera une des formes de l'équation $f = 0$. Mais, si $D = 0$, notre conclusion est inexacte.

Si $f(x)$ a toutes ses racines inégales, D ne sera pas nul et $f(x) = 0$ pourra être remplacé par $\Delta = 0$.

Si $f = 0$ a une racine double, V se réduit à $n - 1$ carrés, son discriminant Δ est nul, mais ses mineurs ne le sont pas, ce sont les discriminants de V obtenus en annulant la variable z_{n-1} et en faisant abstraction d'un carré correspondant à la racine double, mais en le doublant, en sorte que $f = 0$ débarrassé de sa racine double, ou plutôt réduit à n'avoir plus cette racine qu'en qualité de racine simple, sera

$$\begin{vmatrix} s_0 x - s_1 & \dots & s_{n-2} x - s_{n-1} \\ s_1 x - s_2 & \dots & s_{n-1} x - s_n \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

et, en général, si $F(x) = 0$ désigne ce que devient $f = 0$ quand toutes ses racines multiples sont remplacées par les mêmes racines réduites à être simples, F

s'obtiendra en supprimant les p dernières lignes et les p dernières colonnes de Δ , p désignant le nombre des facteurs premiers de f que l'on doit supprimer pour qu'ils deviennent simples.

Nous avons ainsi un moyen de supprimer les facteurs multiples d'une équation.

4. Si nous faisons $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{f'(x)}$, $\psi(x)$ désignant un polynome entier, nous trouvons

$$\begin{aligned} V &= \sum \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} (z_0 + z_1 a_k + \dots + z_{n-1} a_k^{n-1})^2 \\ &= \sum z_i z_j \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} a_k^{i+j}. \end{aligned}$$

Le discriminant de V est $\psi(a_1)\psi(a_2)\dots$, c'est le premier membre de la résultante de $f(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$, on a donc

$$R = \begin{vmatrix} \sum \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} & \sum \frac{\psi(a_k) a_k}{f'(a_k)} & \dots \\ \sum \frac{\psi(a_k) a_k}{f'(a_k)} & \sum \frac{\psi(a_k) a_k^2}{f'(a_k)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

et les fonctions symétriques qui sont les éléments du déterminant R sont très faciles à calculer.

$\sum \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} a_k^p$ est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le quotient

$$\frac{\psi(x)x^p}{f(x)}.$$

Il y a, dans ce qui précède, non pas des théorèmes isolés, mais une véritable méthode que l'on peut appliquer dans une foule de circonstances. Ainsi, dans l'exemple du n° 2, j'ai fait connaître un théorème analogue à celui de Sturm, mais il existe une infinité de

théorèmes analogues permettant de séparer les racines d'une équation algébrique; on peut en effet remplacer la fonction V par une quelconque des suivantes :

$$\sum (x - a) a^{2p} (z_0 + z_1 a + \dots + z_{n-1} a^{n-1})^2,$$

$$\sum \frac{a^{2p}}{x - a} (z_0 + z_1 a + \dots + z_{n-1} a^{n-1})^2,$$

$$\sum (x - a) \frac{1}{a^{2p}} (z_0 + z_1 a + \dots + z_{n-1} a^{n-1})^2,$$

.....

Enfin les considérations précédentes, en faisant usage du calcul intégral, peuvent s'appliquer également aux équations transcendantes, et même aux systèmes d'équations à plusieurs inconnues. La méthode une fois indiquée, le lecteur pourra considérablement augmenter le nombre des applications.