

E. FABRY

Sur une propriété de la fonction ζ

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 205-210

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__205_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[F2e]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION ζ ;

PAR M. E. FABRY.

Considérons la fonction ζ de Weierstrass, définie par la série

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{u}{\omega^2} \right),$$

où $\omega = 2m\omega + 2n\omega'$, m et n prenant toutes les valeurs entières positives et négatives, y compris zéro, sauf le système $m = n = 0$.

Soit

$$\delta = \omega' \zeta(\omega) - \omega \zeta(\omega'); \quad \bullet$$

on sait que $\delta = \pm \frac{\pi i}{2}$, le signe étant celui du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$. Cette relation peut se déduire des propriétés du développement de $\zeta(u) - \frac{u}{\omega} \zeta(\omega)$ en série trigonométrique. Je vais montrer qu'on peut l'obtenir directement par la sommation des séries qui définissent δ

On a

$$\delta = \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega}{\omega'} + \sum' \left(\frac{\omega'}{\omega - \omega} - \frac{\omega}{\omega' - \omega} + \frac{\omega' - \omega}{\omega} \right).$$

Supposons que m varie de $-M$ à $+M$, et n de $-N$ à $+N$. Dans l'expression

$$\omega - \omega = -2n\omega' + (1 - 2m)\omega,$$

$1 - 2m$ prend les valeurs impaires de $1 - 2M$ à $1 + 2M$ et $2n$ les valeurs paires de $-2N$ à $+2N$. Les termes

sont deux à deux égaux et de signes contraires, sauf les termes $-2n\omega' + (1+2M)\omega$, et le terme $-\omega$, car pour $m=n=0$, le terme $+\omega$ est supprimé; donc les termes de $\sum' \frac{\omega'}{\omega - \omega'}$ se réduisent à

$$-\frac{\omega'}{\omega} + \sum_{n=-N}^{+N} \frac{\omega'}{(2M+1)\omega - 2n\omega'}.$$

De même, dans $\sum' \frac{-\omega}{\omega' - \omega}$, les termes se détruisent deux à deux, et il reste

$$\frac{\omega}{\omega'} - \sum_{m=-M}^{+M} \frac{\omega}{(2N+1)\omega' - 2m\omega}.$$

Les termes de $\sum' \frac{1}{\omega}$ disparaissent tous.

δ sera donc égal à la limite, lorsque M et N deviennent infinis, de l'expression

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega'}{(2M+1)\omega - 2n\omega'} - \sum_{-M}^{+M} \frac{\omega}{(2N+1)\omega' - 2m\omega}.$$

Cette limite est la même que celle de l'expression

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega'}{2(M\omega - n\omega')} - \sum_{-M}^{+M} \frac{\omega}{2(N\omega' - m\omega)},$$

car leur différence est

$$\begin{aligned} & - \sum_{-N}^{+N} \frac{\omega\omega'}{[(2M+1)\omega - 2n\omega'](2M\omega - 2n\omega')} \\ & + \sum_{-M}^{+M} \frac{\omega\omega'}{[(2N+1)\omega' - 2m\omega](2N\omega' - 2m\omega)}. \end{aligned}$$

Soient ρ le module de ω , ρ' celui de ω' , θ l'argument de $\frac{\omega'}{\omega}$. On a

$$\begin{aligned} |m\omega + n\omega'|^2 &= m^2\rho^2 + n^2\rho'^2 + 2mn\rho\rho'\cos\theta \\ &= (1 - \cos\theta)(m^2\rho^2 + n^2\rho'^2) + \cos\theta(m\rho + n\rho')^2 \\ &= (1 + \cos\theta)(m^2\rho^2 + n^2\rho'^2) - \cos\theta(m\rho - n\rho')^2, \end{aligned}$$

et, quel que soit le signe de $\cos\theta$,

$$|m\omega + n\omega'|^2 > (m^2\rho^2 + n^2\rho'^2) [1 - |\cos\theta|],$$

$\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega\omega'}{[(2M+1)\omega - 2n\omega'][(2M\omega - 2n\omega')]} \text{ a donc un module}$
plus petit que

$$\frac{\rho\rho'}{1 - |\cos\theta|} \sum_{-N}^{+N} \frac{1}{4(M^2\rho^2 + n^2\rho'^2)};$$

or

$$\begin{aligned} &\sum_{-N}^{+N} \frac{1}{M^2\rho^2 + n^2\rho'^2} \\ &= \frac{1}{M^2\rho^2} + 2 \sum_1^N \frac{1}{M^2\rho^2 + n^2\rho'^2} < \frac{1}{M^2\rho^2} + 2 \int_0^\infty \frac{dr}{M^2\rho^2 + r^2\rho'^2} \\ &= \frac{1}{M^2\rho^2} + \frac{\pi}{M\rho\rho'}, \end{aligned}$$

qui tend vers zéro, lorsque M devient infini. Le même résultat s'applique au second terme, qui a une forme symétrique.

Donc 2δ est égal à la limite de

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega'}{M\omega - n\omega'} - \sum_{-M}^{+M} \frac{\omega}{N\omega' - m\omega}.$$

Ces sommes peuvent se remplacer par des intégrales définies. Considérons, en effet, la somme

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{1}{n+a+bi} = \sum_{-N}^{+N} \frac{n+a-bi}{(n+a)^2+b^2},$$

et supposons $2b > 1$. $\frac{x}{x^2+b^2}$ croît avec x , si x est compris entre $-b$ et $+b$, et décroît dans les autres cas. On a donc

$$\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} < \int_n^{n+1} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2} dx,$$

si $n+a$ est compris entre $-b$ et $b-1$, et

$$\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} < \int_{n-1}^n \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2} dx,$$

si $n+a$ est compris entre $-\infty$ et $-b$ ou entre $b+1$ et $+\infty$. En outre, si $n+a$ est compris entre $b-1$ et b , le plus petit des deux termes $\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2}$, $\frac{n+a+1}{(n+a)^2+b^2}$ est plus petit que $\int_n^{n+1} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2} dx$, si l'on suppose $b-1 > -b$, ou $b > \frac{1}{2}$.

Il en résulte que l'on a, quel que soit a ,

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^{+N} \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} &< \frac{1}{b} + \int_{-N}^{+N} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2} dx \\ &= \frac{1}{b} + \frac{1}{2} L \frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2}. \end{aligned}$$

On obtient, de la même manière, l'inégalité

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} > -\frac{1}{b} + \frac{1}{2} L \frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2}.$$

Si b augmente indéfiniment, avec N

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} - \frac{1}{2} L \frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2}$$

tend vers zéro.

De même, $\frac{b}{x^2+b^2}$, où $b > 0$, a un seul maximum, pour $x = 0$. On en déduit, quel que soit a ,

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^{+N} \frac{b}{(n+a)^2+b^2} &< \frac{1}{b} + \int_{-N}^{+N} \frac{b \, dx}{(x+a)^2+b^2}, \\ \sum_{-N}^{+N} \frac{b}{(n+a)^2+b^2} &> -\frac{1}{b} + \int_{-N}^{+N} \frac{b \, dx}{(x+a)^2+b^2} \\ &= -\frac{1}{b} - \operatorname{arc tang} \frac{b}{N+a} + \operatorname{arc tang} \frac{b}{a-N}, \end{aligned}$$

où les arcs sont compris entre 0 et π , afin que $\operatorname{arc tang} \frac{b}{x}$ varie d'une façon continue lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

N étant positif, on a, quel que soit a ,

$$\operatorname{arc tang} \frac{b}{N+a} < \operatorname{arc tang} \frac{b}{a-N}$$

et

$$\operatorname{arc tang} \frac{b}{N+a} - \operatorname{arc tang} \frac{b}{a-N} = -\operatorname{arc tang} \frac{2Nb}{a^2+b^2-N^2},$$

ces trois arcs étant compris entre 0 et π .

Si b augmente indéfiniment, $\sum_{-N}^{+N} \frac{1}{n-a+bi}$ a la même limite que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L \frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2} + i \left(\operatorname{arc tang} \frac{b}{N+a} - \operatorname{arc tang} \frac{b}{a-N} \right) \\ = L(N+a+bi) - L(a-N+bi) \\ = L \left(\frac{a+N+bi}{a-N+bi} \right), \end{aligned}$$

où L désigne la valeur du logarithme, dont le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et π . Pour les deux premiers, ce coefficient est positif; pour le dernier, il est compris entre 0 et $-\pi$.

Si α est une quantité imaginaire, dont le coefficient

de i tend vers $+\infty$, en même temps que le nombre entier N ,

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{1}{n + \alpha} - L \frac{\alpha + N}{\alpha - N}$$

tend vers zéro, ce logarithme ayant le coefficient de i compris entre 0 et $-\pi$.

Si $\frac{\omega'}{\omega}$ et, par suite, $\frac{-\omega}{\omega'}$ ont le coefficient de i positif, on a

$$2\delta = \lim - \sum_{-N}^{+N} \frac{1}{n - M \frac{\omega}{\omega'}} - \sum_{-M}^{+M} \frac{1}{m + N \frac{\omega}{\omega'}},$$

la limite est la même que celle de

$$-L \frac{-M \frac{\omega}{\omega'} + N}{-M \frac{\omega}{\omega'} - N} - L \frac{N \frac{\omega'}{\omega} + M}{N \frac{\omega'}{\omega} - M}$$

ou

$$-L \frac{M\omega - N\omega'}{M\omega + N\omega'} - L \frac{M\omega + N\omega'}{N\omega' - M\omega} = -L(-1).$$

Si l'on pose

$$L \frac{M\omega - N\omega'}{M\omega + N\omega'} = a + bi,$$

on aura

$$L \frac{M\omega + N\omega'}{N\omega' - M\omega} = -a - (\pi + b)i,$$

car b et $\pi - b$ doivent être compris entre 0 et $-\pi$, et $L(-1)$ représente ici la valeur $-\pi i$. On a donc

$$\delta = \frac{\pi i}{2}.$$

Si le coefficient de i , dans $\frac{\omega'}{\omega}$, était négatif, il est clair que l'on devrait changer les signes des logarithmes et, par suite, de δ .
