NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 190-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__190_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

528.

(1860, p. 247.)

Le nombre figuré par 1121 *ne peut être un carré parfait dans aucun système de numération.* (ROUCHÉ.)

SOLUTION

Par M. N. PLAKHOWO.

Écrivons ce nombre dans la base x; il sera représenté par

$$x^3 + x^2 + 2x + 1 = x^3 + (x+1)^2;$$

et prouvons qu'il ne peut être égal à un carré parfait, ou que $x^3 + (x+1)^2 = y^2$ est une équation impossible. Elle peut s'écrire $x^3 = y^2 - (x+1)^2$. M. Fauquembergue ([1]), en résolvant l'équation $x^3 = y^2 - z^2$, a remarqué avec raison que, si $x = 3m+1$, y est un mult. 3, et si $x = 3m-1$, z est mult. 3. Or nous avons

$$(3m+1)^3 = y^2 - (3m+2)^2,$$

et

$$y^2 = 3(9m^3 + 9m^2 + 3m + 3m^2 + bm) + 2,$$

ou

$$y^2 = 3k + 2.$$

Mais un carré ne saurait être un mult. $3+2$, et cette décomposition est impossible; quant à

$$(3m-1)^2 = y^2 - (3m)^2,$$

cette décomposition est également impossible, puisque

$$y^2 = 3k - 1.$$

Il nous reste à voir si une décomposition en une différence de deux carrés, d'un nombre mult. 3 est possible.

$$3m^2 = y^2 - (3m+1)^2 \qquad \text{d'où} \qquad y^2 = 3k + 1.$$

([1]) Voir *Interm. des mathématiciens*, p. 309, question 461; 1895.

Cette décomposition serait possible, car

$$9^3 = 365^2 - 364^2 = 364^2 + 728 + 1 - 364^2 = 729.$$

dont ni 365, ni 364 n'est divisible par 3. Prenons

$$x^3 = \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2.$$

Ce sera la différence de deux plus petits carrés

$$\frac{x^2 - x}{2} = x + 1 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - 3x + 2 = 0,$$

équation qui ne donne pas de solution entière.

Or il n'existe pas de base x qui donne une décomposition de deux carrés les plus petits, pour que le nombre 1121 soit un carré parfait

$$x^3 = \left(\frac{x^3+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^3-1}{2}\right)^2.$$

Ce sont les carrés les plus grands,

$$\frac{x^3 - 1}{2} = x + 1 \qquad \text{ou} \qquad x^3 - 2x - 3 = 0,$$

Or on voit que cette équation ne donne pas de solutions entières, car si nous posons $x = 2$, le premier membre de l'équation devient positif, et, si nous prenons $x = 1$, le premier membre devient négatif, et cette fonction est toujours croissante de $x = 2$, jusqu'à $x = \infty$. Il ne peut pas y avoir de base x qui donne les carrés maximums, mais nous pouvons poser x égal à un multiple pair ainsi qu'à un multiple impair,

$$6^3 = 55^2 - 53^2 = 29^2 - 15^2, \qquad x^3 = \left(\frac{x^3+4}{4}\right)^2 - \left(\frac{x^3-4}{4}\right)^2.$$

Posons $\frac{x^3 - 4}{4} = x + 1$; cette équation ne donne pas de solutions entières, puisque cette fonction est négative pour $x = 2$, et positive pour $x = 3$, et devient croissante de $x = 3$ jusqu'à $x = \infty$. Nous pouvons poser

$$x^3 = \left(\frac{x^3+16}{8}\right)^2 - \left(\frac{x^3-16}{8}\right)^2, \qquad \frac{x^3-16}{8} = x + 1,$$

équation qui n'a pas de solution entière, qui devient négative pour $x = 3$ et positive pour $x = 4$. Après quoi elle est constamment croissante, et ainsi de suite.

On pourrait même former une équation générale et démontrer que, pour un exposant aussi grand que l'on veut, l'équation n'a pas de racines entières, et que, par conséquent, on ne trouvera pas de base x telle que le nombre figuré par 1121 soit un carré parfait.