Nouvelles annales de mathématiques

Ernest Duporcq

Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 168-171

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__168_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[M[1]5b]

SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

1. On sait que *toute courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques est une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Je me propose, dans cette Note, de donner de cette propriété une démonstration des plus simples par la transformation du second ordre. Les transformations quadratiques étant l'objet d'une des leçons indiquées par le programme d'Agrégation, cette démonstration pourra fournir un intéressant exemple de leur application. J'indiquerai ensuite quelques conséquences.

2. Nous considérerons ici la transformation du second ordre qui associe entre eux les foyers des coniques inscrites à un triangle fixe *abc*, transformation qu'on désigne souvent sous le nom d'*inversion* par rapport au triangle.

Comme on le sait [1], à la droite de l'infini correspond le cercle circonscrit au triangle *abc*, et les points cycliques se transforment l'un en l'autre; enfin une quartique admettant pour points doubles les sommets du triangle *abc* correspond à une conique, qui est inscrite à ce triangle lorsque les points doubles sont de rebroussement. En particulier, si le triangle *abc* est un triangle équilatéral formé par les points de rebrous-

[1] *Voir*, par exemple, mes *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 133-142.

sement d'une hypocycloïde triangulaire, celle-ci correspond au cercle inscrit au triangle *abc*.

Ces résultats rappelés, considérons une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques : puisqu'elle a une tangente double, elle est nécessairement du quatrième ordre et admet trois points de rebroussement, *a*, *b* et *c*. Faisons maintenant une inversion par rapport au triangle *abc*; la courbe considérée a pour transformée une conique inscrite au triangle *abc*, mais cette conique doit toucher aux points cycliques la transformée de la droite de l'infini, c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle *abc* : elle doit donc être un cercle concentrique. Le centre du cercle circonscrit au triangle *abc* devant ainsi être équidistant des côtés, ce triangle est donc équilatéral, et la courbe considérée est l'inverse par rapport à ce triangle de son cercle inscrit, c'est-à-dire une hypocycloïde à trois rebroussements. Le théorème est donc démontré.

3. Comme application, transformons par dualité la propriété suivante, bien connue : le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à des coniques homofocales est une strophoïde ayant pour point double le point fixe, et dont les tangentes en ce point sont conjuguées au faisceau des coniques homofocales.

Faisons une transformation corrélative qui, à ces tangentes au point double, fasse correspondre les points cycliques; au faisceau des coniques homofocales correspond un faisceau ponctuel de coniques conjuguées aux points cycliques, c'est-à-dire un faisceau d'hyperboles équilatères, et, comme la droite de l'infini est la transformée du point fixe d'où l'on menait les tangentes aux coniques homofocales, la transformée de la strophoïde constitue l'enveloppe des asymptotes de ces hyperboles équilatères; or, cette transformée est de troisième classe, et elle touche la droite de l'infini aux points cycliques. Par suite :

L'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est une hypocycloïde triangulaire.

4. Désignons ce triangle par *abc*, et considérons le triangle dégénéré T dont deux côtés sont formés par la droite de l'infini, le troisième côté étant une asymptote (A) d'une des hyperboles envisagées, et le sommet opposé à ce côté étant le point à l'infini de l'autre asymptote. Ce triangle et le triangle *abc* sont inscrits à une même conique : ils sont donc également circonscrits et conjugués à une même conique. Or, une conique circonscrite au triangle dégénéré T est évidemment une parabole ayant A pour tangente au sommet; une conique conjuguée à ce même triangle est, au contraire, une parabole d'axe A. Par suite :

Les asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle, les tangentes au sommet des paraboles inscrites et les axes des paraboles conjuguées à ce même triangle ont pour enveloppe commune une hypocycloïde triangulaire.

Les paraboles conjuguées à un triangle sont d'ailleurs évidemment inscrites au triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du premier; par suite :

L'axe d'une parabole inscrite à un triangle abc est une droite de Simson relative au triangle formé par les parallèles aux côtés du triangle abc issues de ses sommets.

5. Revenons au triangle dégénéré T, de tout à l'heure ; le triangle $\alpha\beta\gamma$ formé par les pieds des hauteurs de *abc* est conjugué à toutes les hyperboles équilatères circonscrites à ce triangle, et une de ces hyperboles est circonscrite au triangle T. Puisqu'il existe ainsi une conique conjuguée au triangle $\alpha\beta\gamma$ et inscrite au triangle T, il y en a une autre ([1]), circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$ et conjuguée au triangle T; autrement dit, la droite A est axe d'une parabole circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$. On voit donc que :

L'enveloppe des axes des paraboles circonscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements.