

E.-M. LÉMERAY

Sur les fonctions numériques et la symétrie abélienne

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1 (1901), p. 163-167

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__163_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[H11] [I11]

**SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES
ET LA SYMÉTRIE ABÉLIENNE;**

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

Étant donné une fonction f et un entier

$$m = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma} \dots,$$

on sait que, si l'on définit une fonction $F(m)$ par la relation

$$F(m) = \sum f(d),$$

où la somme s'étend à tous les diviseurs de m , on a inversement

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(m) = F(m) + \sum f\left(\frac{m}{pq}\right) + \dots \\ \qquad \qquad \qquad - \left[\sum f\left(\frac{m}{p}\right) + \sum f\left(\frac{m}{pqr}\right) + \dots \right]. \end{array} \right.$$

Il est possible de généraliser ce théorème quand on définit $F(m)$ non plus par une somme, mais par une fonction des $f(d)$ possédant la symétrie abélienne. Par

définition, une fonction $\Psi_2(a_1, a_2)$ possède la symétrie abélienne lorsque :

(A) Elle ne change pas quand on permute a_1 et a_2 ;

(B) $\Psi_2[a_1, \Psi_2(a_2, a_3)]$, que nous désignerons par $\Psi_3(a_1, a_2, a_3)$, ne change pas quand on permute a_1, a_2 et a_3 .

En continuant ainsi l'on forme une suite de fonctions par la loi

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_{\lambda-2}, a_{\lambda-1}, a_\lambda) \\ = \Psi_{\lambda-1}[a_1, a_2, \dots, a_{\lambda-2}, \Psi_2(a_{\lambda-1}, a_\lambda)]. \end{aligned}$$

Chacune des fonctions est symétrique par rapport aux 2, 3, ..., λ variables dont elle dépend. D'autre part, représentons par

$$v = \Omega(y, u)$$

la résolution de l'équation

$$y = \Psi_2(u, v),$$

par rapport à v . Le théorème que nous nous proposons de démontrer peut alors s'énoncer ainsi :

Si $d_1, d_2, \dots, d_\lambda$ sont les diviseurs de m , et si l'on définit $F(m)$ par la relation

$$(2) \quad F(m) = \Psi_\lambda[f(d_1), f(d_2), \dots, f(d_\lambda)],$$

on aura inversement

$$(3) \quad f(m) = \Omega(G, H),$$

où

$$(4) \quad \begin{cases} G = \Psi_\mu \left[F(m), F\left(\frac{m}{pq}\right), \dots, F\left(\frac{m}{pqrs}\right) \right], \\ H = \Psi_\nu \left[F\left(\frac{m}{p}\right), \dots, F\left(\frac{m}{pqr}\right), \dots \right]. \end{cases}$$

Les indices μ et ν , qui indiquent le nombre des variables dont dépendent respectivement G et H , sont

égaux : le premier à l'unité augmentée du nombre des diviseurs de m qui contiennent un nombre pair de facteurs premiers DISTINCTS; le second au nombre des diviseurs de m qui en contiennent un nombre impair; μ et ν seront égaux, comme on sait.

Pour démontrer cette proposition, rappelons que, d'après Abel, les conditions (A) et (B) sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction Φ admettant Ψ_2 pour théorème d'addition, c'est-à-dire telle que, si l'on pose

$$(5) \quad a_i = \Phi(x_i),$$

on a

$$\Phi(x_1 + x_2) = \Psi_2(a_1, a_2).$$

Alors, en général, on aura

$$\Phi(x_1 + x_2 + \dots + x_\lambda) = \Psi_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_\lambda).$$

De plus, si l'on pose

$$y = \Psi_2(u, v) = \Phi(x_j), \quad u = \Phi(x_k),$$

la fonction

$$v = \Omega(y, u)$$

n'est autre que

$$\Phi(x_j - x_k).$$

Enfin, si l'on représente par Φ_{-1} la fonction inverse de Φ , de l'équation (5), on tire

$$x_i = \Phi_{-1}(a_i).$$

Il résulte de là que, en faisant $a_i = f(d_i)$, en introduisant dans (2) et (4) la fonction Φ au lieu des fonctions Ψ et en substituant dans (3), on est ramené à démontrer que, si l'on définit $F(m)$ par la relation

$$(6) \quad F(m) = \Phi \left\{ \sum \Phi_{-1} | f(d) | \right\},$$

on aura inversement

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(m) = \Phi \left\{ \sum \Phi_{-1}[F(m)] + \sum \Phi_{-1} \left[F \left(\frac{m}{pq} \right) \right] - \dots \right. \\ \left. - \sum \Phi_{-1} \left[F \left(\frac{m}{p} \right) \right] - \sum \Phi_{-1} \left[F \left(\frac{m}{pqr} \right) \right] - \dots \right\}. \end{array} \right.$$

La démonstration est maintenant immédiate, car les équations (6) et (7) peuvent s'écrire

$$(6') \quad \Phi_{-1}[F(m)] = \sum \Phi_{-1}[f(d)],$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{-1}[f(m)] = \sum \Phi_{-1}[F(m)] + \dots \\ - \sum \Phi_{-1} \left[F \left(\frac{m}{p} \right) \right] - \dots, \end{array} \right.$$

de sorte que, si l'on pose

$$\Phi_{-1}[F(m)] = F'(m), \quad \Phi_{-1}[f(m)] = f'(m),$$

on est ramené à une relation de même forme que (1).

Il faut remarquer que Ψ_2 et Ω peuvent avoir plusieurs déterminations; nous supposons, bien entendu, que lorsqu'on a choisi une détermination de Ψ_2 , celle qu'il convient de prendre pour Ω est par là même déterminée.

Exemple. — Soit la fonction symétrique

$$\Psi_2(a_1, a_2) = a_1 \sqrt{1 + a_2^2} + a_2 \sqrt{1 + a_1^2} \quad (1);$$

on trouve

$$\Psi_3(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3 + \sum a_1 \sqrt{1 + a_2^2} \sqrt{1 + a_3^2},$$

symétrique en a_1, a_2, a_3 ; Ψ_2 possède donc la symétrie

(1) Elle représente le théorème d'addition de la fonction hyperbolique $\text{Sh } x$, qui n'intervient pas d'ailleurs dans le calcul.

abélienne; on trouve ensuite

$$\Psi_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum a_1 a_2 a_3 \sqrt{1+a_4^2} + \sum a_1 \sqrt{1+a_2^2} \sqrt{1+a_3^2} \sqrt{1+a_4^2},$$

.....

Prenons pour $f(m)$ la fonction numérique fondamentale $\varphi(m)$ et supposons $m = 6 = 2 \cdot 3$. Ses diviseurs sont 1, 2, 3, 6 et l'on a

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(6) = 2.$$

En remplaçant les a par les $\varphi(d)$ et tenant compte de (2), on a

$$F(6) = \Psi_4(1, 1, 2, 2) = 12\sqrt{5} + 18\sqrt{2}, \quad F\left(\frac{6}{2 \cdot 3}\right) = 1,$$

$$F\left(\frac{6}{2}\right) = \Psi_2(1, 2) = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}, \quad F\left(\frac{6}{3}\right) = \Psi_2(1, 1) = 2\sqrt{2}.$$

En tenant compte des équations (4), on a ensuite

$$G = \Psi_2\left[F(6), F\left(\frac{6}{2 \cdot 3}\right)\right] = 63 + 20\sqrt{10},$$

$$H = \Psi_2\left[F\left(\frac{6}{3}\right), F\left(\frac{6}{2}\right)\right] = 7\sqrt{5} + 10\sqrt{2}.$$

D'autre part, de

$$y = \Psi_2(u, v) = u\sqrt{1+v^2} + v\sqrt{1+u^2},$$

on tire

$$v = \Omega(y, u) = y\sqrt{1+u^2} - u\sqrt{1+y^2},$$

et l'on vérifie que

$$\varphi(6) = \Omega(G, H) = G\sqrt{1+H^2} - H\sqrt{1+G^2} = 2.$$
