

E. IAGGI

Démonstration directe du théorème d'addition de la fonction elliptique $Z(x)$

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 1
(1901), p. 14-16

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__14_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[F4a]

DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉOREME D'ADDITION
DE LA FONCTION ELLIPTIQUE $Z(x)$;

PAR M. E. IAGGI.

Pour étudier la fonction de seconde espèce déterminée
par l'intégrale

$$(1) \quad Z = k^2 \int_0^x \frac{u^2 du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}},$$

on pose $u = \operatorname{sn} x$ et l'on considère la fonction

$$(2) \quad Z(x) = k^2 \int_0^x \operatorname{sn}^2 x \, dx$$

qui s'exprime, comme on sait, au moyen de la fonction $\Theta(x)$, et, des propriétés de la fonction Θ , on déduit le théorème d'addition

$$(3) \quad Z(x+y) = Z(x) + Z(y) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{sn}(x+y).$$

Ce théorème n'est, au fond, que le théorème d'addition de la fonction de première espèce $\operatorname{sn} x$, et nous allons le démontrer directement sans nous servir de la fonction Θ .

Posons

$$\begin{aligned} t &= x + y, & u_1 &= \operatorname{sn} x, \\ & & u_2 &= \operatorname{sn} y, \\ & & u_3 &= \operatorname{sn}(x+y) = \operatorname{sn} t, \\ \Delta u &= \sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}. \end{aligned}$$

On sait que

$$(4) \quad u_3 = \frac{u_1 \Delta u_2 + u_2 \Delta u_1}{1 - k^2 u_1^2 u_2^2}.$$

Mais on a ⁽¹⁾

$$u_1^2 \Delta u_2^2 - u_2^2 \Delta u_1^2 = (u_1^2 - u_2^2)(1 - k^2 u_1^2 u_2^2).$$

La formule d'addition de $\operatorname{sn} x$ peut donc se mettre sous la forme

$$(5) \quad u_3 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1}.$$

Si l'on remarque que

$$u_1 = \operatorname{sn}(t-y), \quad u_2 = \operatorname{sn}(t-x),$$

on pourra écrire, au moyen de la formule précédente,

$$u_1 = \frac{u_3^2 - u_2^2}{u_3 \Delta u_2 + u_2 \Delta u_3}, \quad u_2 = \frac{u_3^2 - u_1^2}{u_3 \Delta u_1 + u_1 \Delta u_3}$$

(¹) On a l'occasion de démontrer cette identité lorsqu'on intègre l'équation d'Euler, soit par la méthode de M. Darboux, soit par la méthode que nous avons exposée dans notre Note *Sur l'intégrale d'Euler et l'addition des fonctions elliptiques* (*Nouvelles Annales*, p. 443; 1900).

ou

$$(6) \quad u_3^2 - u_1 u_2 \Delta u_3 = u_2^2 + u_1 u_3 \Delta u_2,$$

$$(7) \quad u_3^2 - u_1 u_2 \Delta u_3 = u_1^2 + u_2 u_3 \Delta u_1.$$

Or, on a aussi

$$(8) \quad \frac{du_3}{\Delta u_3} = \frac{du_1}{\Delta u_1} + \frac{du_2}{\Delta u_2}.$$

Multipliant les deux membres de (6) par $\frac{du_2}{\Delta u_2}$, les deux membres de (7) par $\frac{du_1}{\Delta u_1}$ et ajoutant, en tenant compte de (8), on obtient l'équation différentielle

$$\frac{u_3^2 du_3}{\Delta u_3} - u_1 u_2 du_3 = \frac{u_1^2 du_1}{\Delta u_1} + \frac{u_2^2 du_2}{\Delta u_2} + u_1 u_3 du_2 - u_2 u_3 du_1$$

qui s'écrit

$$(9) \quad \frac{u_3^2 du_3}{\Delta u_3} = \frac{u_1^2 du_1}{\Delta u_1} + \frac{u_2^2 du_2}{\Delta u_2} + d(u_1 u_2 u_3).$$

Multipliant les deux membres de (9) par k^2 et intégrant en remarquant que les deux membres doivent être identiques si l'on fait $u_1 = 0 = x$, et, par suite, que la constante d'intégration est nulle, on obtient la formule d'addition (3) de la fonction $Z(x)$.