

MICHAEL BAUER

Remarques sur la théorie des groupes finis

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 59-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__59_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A 4a]

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES GROUPES FINIS;

PAR M. MICHAEL BAUER.

Je me propose de généraliser quelques théorèmes de M. *Frobenius* ⁽¹⁾ sur le nombre de certains sous-groupes. Les méthodes employées sont celles de M. *Frobenius*.

I. *Le nombre des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p}$ est $\equiv \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \pmod{p}$ selon qu'il y a entre eux des sous-groupes invariants ou non. Le nombre n désigne l'ordre du groupe, p est un facteur premier.*

(¹) *Berliner Sitzungsberichte*, 1895, p. 163-194, 981-993.

S'il n'y a pas de sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$, le nombre des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p}$ est évidemment $\equiv 0 \pmod{p}$. Soient donc A, B deux sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$. Alors, désignant le groupe donné par h , on a

$$h = AB;$$

d'où il suit que le plus grand commun diviseur de A et de B est un sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{p^2}$. Si E est un autre sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{p}$, le plus grand commun diviseur de A et de E est différent du plus grand commun diviseur de A et de B. Ainsi les sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$ se partagent en classes. La classe $i^{\text{ième}}$ se compose des sous-groupes

$$(1) \quad \Lambda_1^{(i)}, \quad \Lambda_2^{(i)}, \quad \dots,$$

dont le plus grand commun diviseur avec A est $\mathfrak{S}_i$. Mais les facteurs-groupes

$$\frac{\Lambda_1^{(i)}}{\mathfrak{S}_i}, \quad \frac{\Lambda_2^{(i)}}{\mathfrak{S}_i}, \quad \dots,$$

ne sont que les sous-groupes d'ordre p du groupe $\frac{h}{\mathfrak{S}_i}$, dont l'ordre est p^2 , excepté le sous-groupe $\frac{A}{\mathfrak{S}_i}$. Ainsi, chaque classe contient des groupes en nombre p ou 0; le nombre des sous-groupes-invariants est donc $\equiv 1 \pmod{p}$.

S'il y a encore des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p}$ qui ne sont pas invariants, leur nombre est $\equiv 0 \pmod{p}$.

C. Q. F. D.

II. *Le nombre des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^2}$*

est $\equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pmod{p}$ selon qu'il y a des sous-groupes invariants entre eux ou non.

S'il n'y a pas de sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$, le nombre cherché est évidemment $\equiv 0 \pmod{p}$. S'il y a des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$, alors il existe aussi des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$. Soient les sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p}$

$$(2) \quad A_1, A_2, \dots, A_r \quad r \equiv 1 \pmod{p},$$

et soient les sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$,

$$(3) \quad B_1, B_2, \dots, B_s.$$

Si nous désignons par a_p le nombre des groupes (3) contenus comme sous-groupes dans A_p et par b_σ le nombre des groupes (2) que contient B_σ , nous avons

$$(4) \quad \sum_{\sigma=1}^s b_\sigma = \sum_{p=1}^r a_p.$$

Cependant

$$b_\sigma \equiv 1 \pmod{p}.$$

Car, si le groupe A_x contient B_σ comme sous-groupe, alors le groupe $\frac{A_x}{B_\sigma}$ est un sous-groupe d'ordre $p^{\beta-1}$ du groupe $\frac{h}{B_\sigma}$ dont l'ordre est p^β . De la relation (4) il suit donc que

$$(5) \quad \sum_{\sigma=1}^s b_\sigma \equiv s \equiv \sum_{p=1}^r a_p \pmod{p}.$$

Déterminons maintenant les nombres a_p . A_p est un sous-groupe invariant. Nous démontrerons qu'il contient

des groupes d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$ comme sous-groupes invariants (ces sous-groupes ne doivent pas être à la fois des sous-groupes invariants de h). Posons

$$n = p^x m, \text{ le plus grand commun diviseur } (p, m) = 1.$$

Si A_p contient, par exemple, B_1 comme sous-groupe, B_1 est déjà un sous-groupe cherché. S'il n'est pas ainsi, nous avons

$$h = A_p B_1,$$

d'où il suit que le plus grand commun diviseur de A et de B est un groupe $\mathfrak{Z}$, dont l'ordre est $p^{x-\beta-1}m$. Ce groupe est sous-groupe invariant de A . Le facteur-groupe $\frac{A_p}{\mathfrak{Z}}$ d'ordre p^β a des sous-groupes invariants d'ordre p , donc A a des sous-groupes invariants d'ordre

$$p^{x-\beta}m = \frac{n}{p^\beta}.$$

Notre théorème II étant déjà démontré pour les sous-groupes d'indice p , nous pouvons le supposer démontré pour les sous-groupes d'indices

$$p, p^2, \dots, p^{\beta-1}.$$

Il en résulte que le nombre des sous-groupes invariants de A_p , dont l'ordre est $\frac{n}{p^\beta}$, est $\equiv 1 \pmod{p}$. Il faut encore exclure de ces sous-groupes ceux qui ne sont pas des sous-groupes invariants de G . Leur nombre est évidemment $\equiv 0 \pmod{p}$. Donc

$$\alpha_p \equiv 1 \pmod{p},$$

d'où il suit que

$$s \equiv \sum_{p=1}^r \alpha_p \equiv r \equiv 1 \pmod{p}.$$

S'il y a encore des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{p^\beta}$ qui ne sont pas invariants, leur nombre est $\equiv 0 \pmod{p}$.

C. Q. F. D.

M. Frobenius (1) a démontré le théorème suivant :

III. Posons

$$n = ab.$$

Si le plus grand commun diviseur

$$(a, b) = 1,$$

alors le groupe ne peut avoir qu'un seul sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{b}$. Chaque sous-groupe, dont l'ordre divise $\frac{n}{b}$, est contenu comme sous-groupe dans ce sous-groupe invariant.

On peut établir par un raisonnement analogue la proposition suivante, qui complète ce théorème :

IV. Chaque sous-groupe invariant, dont l'ordre divise $\frac{n}{b}$, est sous-groupe de tous les sous-groupes d'ordre $\frac{n}{b}$.

De I et IV on déduit les propositions suivantes :

V. Posons

$$n = ab,$$

$$(a, b) = 1, \quad p \text{ est un nombre premier.}$$

Si le nombre des sous-groupes invariants d'ordre $\frac{n}{bp}$ est > 1 , alors le nombre des sous-groupes d'ordre $\frac{n}{bp^\beta}$, $\beta \geq 1$, est $\equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \pmod{p}$.

(1) Page 170, I, § II.

Il suit alors de ce qui précède qu'il y a un sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{b}$, etc.

VI. *Posons*

$$n = ab, \\ (a, b) = 1, \quad p \text{ est un nombre premier.}$$

S'il y a un sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{bp^\beta}$, alors il existe un nombre

$$0 \leq \gamma \leq \beta,$$

de telle sorte que le groupe ait un seul sous-groupe invariant d'ordre $\frac{n}{bp^\gamma}$.

Les théorèmes III, IV^r sont contenus dans les suivants :

VII. *Posons*

$$n = n' \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}, \quad n' = ab, \\ (n', p_i) = 1, \quad (a, b) = 1.$$

Si Λ est un sous-groupe invariant d'ordre

$$a \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i},$$

alors chaque sous-groupe, dont l'ordre divise a , est sous-groupe de Λ .

VIII. *Si Λ est un sous-groupe d'ordre*

$$a \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i},$$

alors chaque sous-groupe invariant, dont l'ordre divise a , est sous-groupe de Λ .

Voici des conséquences de VIII :

IX. *Posons*

$$n = ab,$$

$$(a, b) = 1, \quad p \text{ est un nombre premier.}$$

S'il y a un sous-groupe invariant d'ordre a , alors le nombre des sous-groupes d'ordre ap^β est $\equiv 1 \pmod{p}$. Car, G étant un sous-groupe d'ordre ap^β , le facteur-groupe $\frac{G}{A}$ est sous-groupe d'ordre p^β du groupe $\frac{h}{A}$.

X. *Si un groupe a un sous-groupe invariant, dont l'ordre n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n , il a aussi un sous-groupe invariant, de telle sorte qu'il n'existe pas d'autres sous-groupes invariants dont l'ordre soit le même.*

Soient A, B des sous-groupes invariants d'un même ordre, qui n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n . Le multiple

$$AB$$

est aussi un sous-groupe invariant, dont l'ordre a la même propriété, etc.

XI. *Si l'ordre d'un sous-groupe invariant maximum, m , n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n , il n'y a pas d'autre sous-groupe invariant d'ordre m .*

XII. *Si M est un sous-groupe maximum dont l'ordre m n'est pas divisible par tous les facteurs premiers de n , alors chaque sous-groupe invariant, dont l'ordre divise m , est sous-groupe de M .*

M. Frobenius démontre le théorème généralisé de M. Sylow en faisant usage de l'équation symbolique

$$Xg = E.$$

(66)

On peut éviter la discussion de cette équation si l'on part du *théorème de M. Sylow*, et l'on fait l'induction par ordres décroissants.