

ERNEST CESÀRO

**Sur une classe de courbes planes
remarquables**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 489-494

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__489_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__489_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CLASSE DE COURBES PLANES REMARQUABLES;

PAR M. ERNEST CESÀRO.

Il y a des liaisons simples et nombreuses entre les courbes représentées par l'équation intrinsèque

$$(1) \quad s = \int \frac{\lambda \, d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu - 1}},$$

λ et μ étant deux constantes, dont la première peut être prise indifféremment avec le signe $+$ ou $-$. Il faut remarquer que, pour $\mu = -2$, l'équation (1) représente une ligne cycloïdale, à savoir la *cycloïde* pour $\pm\lambda = 1$, une *épicycloïde* pour $\lambda^2 > 1$, une *hypocycloïde* pour $\lambda^2 < 1$. En particulier, pour $\pm\lambda = 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, etc., on trouve respectivement l'*épicycloïde à deux rebroussements*, la *cardioïde*, l'*astroïde*, l'*hypocycloïde à trois rebroussements*, etc. Pour $\mu = -1$ la courbe représentée par l'équation (1) est *parallèle à la ligne cycloïdale*, qui correspond à la même valeur de λ . Pour $\mu = 1$ la même équation représente une *alcyonide*; et, en particulier, si $\pm\lambda = \frac{1}{2}$, la *chaînette*. Elle représente aussi, pour $\mu = 2$ et $\pm\lambda = 1$, la *chaînette d'égale résistance*; pour $\mu = 4$ et $\pm\lambda = 3$, la *lemniscate de Bernoulli*; pour $\mu = \frac{2}{3}$ et $\pm\lambda = \frac{1}{3}$, la *parabole*; pour $\mu = \frac{1}{3}$ et

$\pm \lambda = \frac{1}{3}$, l'*hyperbole équilatère*. Enfin, plus généralement, pour $\pm \lambda = \mu - 1$ l'équation (1) représente une *spirale sinusoïde*, pour $\pm \lambda = \frac{1}{2} \mu \geq 1$ une *ligne de Ribaucour*, et pour $\pm \lambda = \mu \geq 1$ une autre importante famille de courbes, caractérisées par la propriété que leurs circonférences osculatrices, réduites dans un rapport constant autour des points de contact correspondants, au lieu de *passer par un point fixe*, comme dans les spirales sinusoïdes, ou d'être *normales à une même droite*, comme dans les lignes de Ribaucour, sont *tangentes à une droite fixe*. Le cas excepté ($\pm \lambda = 1, \mu = 1$) est celui d'une alysoïde particulière ($\rho = a + \frac{s^2}{4a}$), lieu des points milieux des rayons de courbure d'une chaînette d'égale résistance.

Prenons comme axes (mobiles) la tangente et la normale en un point quelconque M d'une courbe (1), et partageons le rayon de courbure en M dans un rapport constant par un point M'. On sait (1) que les variations absolues des coordonnées de ce point ($x = 0, y = k\rho$) sont données par les formules

$$(2) \quad \dot{x} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho},$$

qui deviennent, dans le cas actuel, $\dot{x} = 1 - k, \dot{y} = k \frac{d\rho}{ds}$, d'où l'on déduit, pour exprimer l'arc de (M'),

$$\frac{ds'}{ds} = \sqrt{(1-k)^2 + k^2 \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2}.$$

D'autre part on a, en vertu de (1),

$$\left(\frac{\rho}{a} \right)^\mu = 1 + \lambda^2 \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2.$$

(1) *Geometria intrinseca*, p. 20.

Donc, si l'on attribue à k l'une ou l'autre des valeurs suivantes

$$k_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \quad k_2 = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

on obtient deux lignes (M_1) et (M_2) , dont les arcs sont donnés par les formules

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{\lambda + 1} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\frac{\mu}{2}}, \quad \frac{ds_2}{ds} = \frac{1}{\lambda - 1} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\frac{\mu}{2}},$$

de sorte que

$$(3) \quad (\lambda + 1) s_1 = (\lambda - 1) s_2 = \int \frac{\lambda d\rho}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\mu}}}.$$

Comme on a, d'ailleurs, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2$, on voit que *les deux lignes partagent harmoniquement les rayons de courbure de (M)* . En outre le coefficient angulaire de la tangente à (M') est

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{k}{1 - k} \frac{d\rho}{ds} = \pm \lambda \frac{d\rho}{ds} = \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{a} \right)^{\mu} - 1}.$$

Il en résulte que les inclinaisons des tangentes à (M_1) et (M_2) sur la tangente à (M) sont deux angles supplémentaires, φ et $\pi - \varphi$, définis par la formule

$$\cos \varphi = \left(\frac{\rho}{a} \right)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Donc (M_1) et (M_2) peuvent être considérées comme *les deux branches de l'enveloppe d'une circonférence Ω* , qui joue par rapport à (M) le même rôle que la circonférence directrice pour les lignes cycloïdales, puisque *le centre de courbure de (M) , en tout point M , appartient à la polaire de M par rapport à Ω* . Le centre de Ω

est un point M_0 , dont les coordonnées

$$(4) \quad x = -\frac{\lambda^2 \rho}{\lambda^2 - 1} \frac{d\rho}{ds}, \quad y = \frac{\lambda^2 \rho}{\lambda^2 - 1},$$

sont proportionnelles aux coordonnées du centre de courbure de la développée de (M) . Donc ce dernier point se trouve toujours, comme dans le cas $(\mu = -2)$ des lignes cycloïdales, sur le diamètre de Ω , qui passe par M .

Ce qu'il y a de remarquable c'est que *les courbes* (M_0) , (M_1) , (M_2) *appartiennent toutes à la classe définie par l'équation* (1). Remarquons d'abord qu'on a

$$d\varphi = -\frac{1}{\sin \varphi} d\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{\mu}{2}} = \frac{\mu \cot \varphi}{2\rho} d\rho = \frac{\mu ds}{2\lambda \rho},$$

d'où l'on déduit l'angle de contingence de (M) :

$$\frac{ds'}{\rho'} = \frac{ds}{\rho} \pm d\varphi = \left(1 \pm \frac{\mu}{2\lambda}\right) \frac{ds}{\rho}.$$

Les rayons de courbure de (M_1) et (M_2) sont donc

$$\rho_1 = \frac{2\lambda a}{(\lambda + 1)(2\lambda - \mu)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2} + 1},$$

$$\rho_2 = \frac{2\lambda a}{(\lambda - 1)(2\lambda - \mu)} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2} + 1}.$$

On vérifie aisément que *les centres de courbure de* (M_1) *et* (M_2) *sont en ligne droite avec le centre de courbure de* (M) . Il suffit de porter les derniers résultats dans les formules (3) pour trouver que (M_1) et (M_2) sont définies, parmi les courbes (1), par les valeurs suivantes des paramètres λ et μ :

$$\lambda_1 = \frac{2\lambda - \mu}{\mu + 2}, \quad \lambda_2 = \frac{2\lambda}{\mu - 2}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \frac{2\mu}{\mu + 2}.$$

Quant à (M_0) , l'application des formules (2) aux

coordonnées (4) donne

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\mu+2}{\lambda^2-1} \left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu, \quad \dot{y} = 0.$$

Comme on devait s'y attendre, les tangentes à (M) et (M₀) en deux points correspondants sont parallèles. Il s'ensuit

$$\frac{ds_0}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\mu+2}{\lambda^2-1} \left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu, \quad \frac{ds_0}{\rho_0} = \frac{ds}{\rho},$$

d'où

$$(5) \quad \begin{cases} s_0 = \frac{\lambda}{2} \frac{\mu+2}{\lambda^2-1} \int \frac{\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu - 1}}, \\ \rho_0 = \frac{\mu+2}{\lambda^2-1} \frac{a}{2} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu+1}. \end{cases}$$

L'expression de s_0 peut être mise sous une forme très simple en remarquant que

$$ds_0 = -x ds = -dx + \left(\frac{\gamma}{\rho} - 1\right) ds = -dx + \frac{ds}{\lambda^2-1},$$

d'où

$$s = (\lambda^2 - 1) (s_0 + x).$$

Enfin, par l'élimination de ρ entre les égalités (5), on arrive à voir que, dans la classe (1), la courbe (M₀) est caractérisée par les valeurs suivantes des paramètres λ et μ :

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\mu+1}, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{\mu+1}.$$

On suppose, bien entendu, que (M) ne soit pas parallèle à une ligne cycloïdale. Dans ce cas ($\mu = -1$) la seconde formule (5) montre immédiatement que (M₀) est une circonférence. Il faut remarquer aussi, dans le cas général, que le rayon de Ω , évidemment égal à *

$$R = -\frac{x}{\sin \varphi} = \frac{\lambda}{\lambda^2-1} \frac{\rho}{\cos \varphi} = \frac{\lambda a}{\lambda^2-1} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}+1},$$

peut être mis sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$R = \frac{\lambda_1 \rho_1}{\lambda_1 - 1}, \quad R = \frac{\lambda_2 \rho_2}{\lambda_2 + 1},$$

d'où l'on déduit que (M_0) n'est autre que la ligne (M_2) relative à (M_1) , en même temps qu'elle est la ligne (M_1) relative à (M_2) . On remarquera, en particulier, que si (M) est une ligne de Ribaucour ($\lambda = \frac{1}{2} \mu$), il en est de même de (M_0) , et que les deux lignes admettent la droite (M_2) comme directrice, tandis que pour (M_1) on a $\lambda_1 = \mu_1$. Il en résulte que toute courbe (1), à *paramètres égaux*, peut être considérée comme l'*enveloppe des circonférences décrites des points d'une ligne de Ribaucour comme centres, tangentielllement à la directrice de cette ligne*. On peut aussi la considérer comme le *lieu des conjugués harmoniques, par rapport aux rayons de courbure d'une ligne de Ribaucour, des points de rencontre des normales à cette courbe avec la directrice*; et les centres de courbure des deux lignes, en deux points correspondants, se trouvent toujours sur une perpendiculaire à la directrice. Nous n'insistons pas sur une foule d'autres propriétés, qu'il serait aisé de déduire des formules qui précèdent.