

A. DE SAINT-GERMAIN

Solution du problème de mécanique proposé au concours d'agrégation en 1899

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 468-475

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__468_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ
AU CONCOURS D'AGREGATION EN 1899;**

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Je vais, comme j'ai fait plusieurs fois dans les *Nouvelles Annales*, indiquer une solution, bien simple, du problème de Mécanique proposé au Concours d'agré-gation de 1899. Je résume l'énoncé :

Une sphère S, pesante, homogène, non élastique, de rayon ρ , de masse m , d'abord en repos sur un plan horizontal H parfaitement poli, est choquée, en un point P de sa surface, par un point M, de poids mg , animé d'une vitesse horizontale connue et non tan-gente à S; après le choc, M s'incruste en P sur la sphère. Déterminer le mouvement du système aussitôt après le choc; dire dans quelles régions doit se trouver P pour que la sphère soit soulevée, ou ne le soit pas, au-dessus du plan H. Calculer, dans les deux cas, la perte de force vive. Chercher, dans le second cas, le mouvement ultérieur du système.

(¹) Cette Note a été rédigée à la demande de M. Appell, qui s'est servi de ce théorème de Géométrie dans un article relatif aux expé-riences du commandant Hartmann (*Bulletin de la Société mathe-matique de France*, 1900).

Prenons des axes rectangulaires fixes dont l'origine O coïncide avec le centre de S avant le choc, OX dirigé dans le sens de la vitesse initiale du point M, vitesse égale à V, OZ suivant la verticale ascendante. Soient x, y, z les coordonnées initiales de P : x est nécessairement négatif. Je fais $m = 1$ et le moment d'inertie μ de S autour d'un de ses diamètres est $\frac{2}{5} \rho^2$. Je définirai le mouvement du système immédiatement après le choc par les composantes u, v, w de la vitesse acquise par le centre de la sphère et par les composantes p, q, r de la rotation instantanée ω . La vitesse du point M, égale à celle de P, aura pour composantes

$$u + qz - ry, \quad v + rx - pz, \quad w + py - qx.$$

Supposons d'abord que S doive être soulevée au-dessus du plan H et, par suite, que w soit positif. La somme des projections des quantités de mouvement étant la même avant et après le choc, nous avons trois équations :

$$(1) \quad \begin{cases} V = 2u + qz - ry, \\ 0 = 2v + rx - pz, \\ 0 = 2w + py - qx; \end{cases}$$

la conservation de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport aux trois axes donne encore

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = \mu p + y(w + py - qx) - z(v + rx - pz), \\ Vz = \mu q + z(u + qz - ry) - x(w + py - qx), \\ -Vy = \mu r + x(v + rx - pz) - y(u + qz - ry). \end{cases}$$

Ajoutant ces équations respectivement multipliées par x, y, z , on a :

$$(3) \quad px + qy + rz = 0,$$

cette équation exprime que ω est perpendiculaire à OP;

on pouvait l'écrire à l'avance parce que ω doit être dirigé suivant le diamètre conjugué du plan du couple de percussion par rapport à l'ellipsoïde central de S, qui est lui-même une sphère. Les équations (1) donnent

$$(4) \quad u = \frac{V + ry - qz}{2}, \quad v = \frac{pz - rx}{2}, \quad w = \frac{qx - py}{2}.$$

Je substitue ces valeurs dans les équations (2), puis, en vertu de la relation (3), je remplace, dans la première des équations obtenues, les termes $-\frac{qy + rz}{2}x$ par $\frac{px^2}{2}$; dans la seconde, les termes en y deviennent de même $\frac{qy^2}{2}$; dans la troisième, les termes en z deviennent $\frac{rz^2}{2}$. Je forme ainsi trois équations renfermant chacune une seule inconnue, et, en remplaçant μ par $\frac{2}{3}\rho^2$, $x^2 + y^2 + z^2$ par ρ^2 , j'en tire

$$p = 0, \quad q = \frac{5Vz}{9\rho^2}, \quad r = -\frac{5Vy}{9\rho^2};$$

puis les équations (4) donnent, après de simples réductions,

$$u = \frac{9x^2 + 1y^2 + 1z^2}{18\rho^2} V, \quad v = \frac{5xyV}{18\rho^2}, \quad w = \frac{5xzV}{18\rho^2}.$$

Pour être d'accord avec notre hypothèse, il faut que la valeur trouvée pour w soit positive; x étant négatif, z doit l'être aussi et le point P situé sur la moitié inférieure de la surface S, ce qui semble assez évident *a priori*.

Calculons directement la perte Q de force vive due au choc,

$$(5) \quad \begin{cases} Q = V^2 - u^2 - v^2 - w^2 - \mu\omega^2 - (u + qz - ry)^2 \\ \quad - (v - rx - pz)^2 - (w + py - qx)^2; \end{cases}$$

remplaçant u, v, w par leurs valeurs (4), on trouve, après réduction des termes semblables,

$$Q = \frac{1}{2} V^2 - \mu \omega^2 - \frac{1}{2} [(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2].$$

En vertu de l'identité de Lagrange et de la relation (3), la quantité entre crochets se réduit à

$$(p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

et l'on a

$$Q = \frac{1}{2} V^2 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \right) \rho^2 \omega^2 = \frac{9x^2 + 4y^2 + 4z^2}{18\rho^2} V^2 = Vu.$$

Un calcul analogue permettrait de vérifier le théorème de Carnot. Mais si l'on admet *a priori* l'application de ce théorème, ou arrivera presque immédiatement à la valeur précédente de Q . Écrivons, en effet, que la force vive perdue est égale à la force vive due aux vitesses perdues; on a

$$(6) \quad \begin{cases} Q = u^2 + v^2 + w^2 + \mu \omega^2 + (V - u - qz + ry)^2 \\ \quad + (v + rx - pz)^2 + (w + py - qx)^2. \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre avec l'équation (5); il se produit d'énormes réductions grâce à ce fait que S était d'abord en repos et la vitesse initiale de M parallèle à OX ; il reste

$$2Q = 2V^2 - 2V(u + qz + ry) = 2V(V - u - qz + ry);$$

or, en vertu de la première équation (1), la dernière parenthèse est égale à u , et Q à Vu .

Passons au cas où S doit rester sur le plan H , w étant nul. La sphère reçoit du plan une percussion N , mais comme celle-ci est dirigée suivant OZ , nous aurons encore les deux premières équations (1) et (4), les équations (2) avec w nul et la relation (3). Si, dans les

équations (2), je remplace u et v par leurs valeurs (4), j'obtiens des équations un peu moins symétriques que dans le premier cas :

$$(7) \quad 0 = \mu p + \gamma(py - qx) - z \frac{rx - pz}{2},$$

$$(8) \quad \frac{1}{2} Vz = \mu q + z \frac{qz - ry}{2} - x(py - qx),$$

$$(9) \quad -\frac{1}{2} Vy = \mu r + x \frac{rx - pz}{2} - \gamma \frac{qz - ry}{2}.$$

L'équation (9) est la même que l'équation correspondante dans le premier cas et nous en tirerons encore pour r ,

$$r = -\frac{5V\gamma}{9\rho^2};$$

donc, eu égard à l'équation (3),

$$(10) \quad px + q\gamma = \frac{5V\gamma z}{9\rho^2}.$$

Ajoutons les équations (7) et (8) multipliées par γ et par $-x$:

$$-\frac{1}{2} Vxz = \left(\mu + x^2 + \gamma^2 + \frac{1}{2} z^2 \right) (py - qx);$$

d'où, en posant $x^2 + \gamma^2 = \alpha^2$,

$$(11) \quad py - qx = -\frac{5Vxz}{9\rho^2 + 5\alpha^2}.$$

Des équations (10) et (11) on tire,

$$p = \frac{25Vx\gamma z}{9\rho^2(9\rho^2 + 5\alpha^2)}, \quad q = \frac{5Vz(9\rho^2 + 5\gamma^2)}{9\rho^2(9\rho^2 + 5\alpha^2)},$$

et les valeurs (4) de u , v deviennent

$$u = \frac{(63x^2 + 28\gamma^2 + 18z^2)V}{9(9\rho^2 + 5\alpha^2)}, \quad v = \frac{35Vx\gamma}{9(9\rho^2 + 5\alpha^2)}.$$

La percussion N est égale à l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur OZ , ou à $p\gamma - qx$, dont nous avons la valeur (11) : or N doit être positive; il faut donc que xz soit négatif et, par suite, z positif : le point P sera sur la moitié supérieure de la surface de S .

On peut calculer directement, comme dans le premier cas, la perte de force vive due au choc : ce calcul exige quelque attention. Mais on peut aussi employer la méthode qui nous a conduit si rapidement au résultat : la perte de force vive est encore exprimée par la formule (5) où ω serait nul : le théorème de Carnot conduit encore à l'équation (6) malgré l'intervention de la percussion N , parce que son travail est nul : en combinant les deux expressions, on trouve, comme dans le premier cas, que la force vive perdue est égale à Vu .

Le mouvement ultérieur du système est celui d'un solide de révolution qui glisse sans frottement sur un plan horizontal. Le solide a son centre de gravité G au milieu du rayon de S qui aboutit en P : sa masse est égale à 2; ses moments d'inertie autour de l'axe de figure GP et d'une perpendiculaire quelconque menée par le point G sont

$$C = \frac{2}{5} \rho^2, \quad A = \frac{2}{5} \rho^2 + \frac{2}{4} \rho^2 = \frac{9}{10} \rho^2.$$

Conservons les axes fixes du début et définissons la position du solide à l'instant t par les coordonnées ξ, η, ζ du point G et par les angles d'Euler θ, ψ, φ ; θ étant l'angle de GP avec OZ , ζ est égal à $\frac{1}{2}\rho \cos \theta$ et la force vive

$$2T = 2\xi'^2 + 2\eta'^2 + \frac{1}{2}\rho^2\theta'^2 \sin^2 \theta \\ + A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta) + C(\varphi' + \psi' \cos \theta)^2.$$

Pour un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, le travail des forces agissant sur le système est $-2g\delta\zeta$ ou $g\rho\sin\theta\delta\theta$; les équations de Lagrange relatives à ξ, η, φ, ψ sont

$$\frac{d\xi'}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta'}{dt} = 0, \quad \frac{d(\varphi' + \psi' \cos\theta)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} [\Lambda \psi' \sin^2\theta + C(\varphi' + \psi' \cos\theta) \cos\theta] = 0.$$

Les deux premières expriment que ξ', η' ont des valeurs constantes, qui sont évidemment $\frac{1}{2}V$ et zéro. La valeur de $\varphi' + \psi' \cos\theta$ est aussi constante et égale à la projection de la rotation initiale ω sur GP, c'est-à-dire à $\frac{px + qy + vz}{\rho}$ ou, (3), à zéro. On a donc toujours

$$\varphi' + \psi' \cos\theta = 0.$$

Mais ce résultat simplifie beaucoup la quatrième équation de Lagrange, qui exprime alors l'invariabilité de $\psi' \sin^2\theta$; ce produit, qui représente dans le cas actuel la projection de la rotation instantanée du système sur OZ, est égal à sa valeur initiale r ,

$$\psi' \sin^2\theta = r.$$

Au lieu de la cinquième équation de Lagrange, prenons l'intégrale des forces vives : eu égard aux résultats précédents, elle peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{2} \rho^2 \sin^2\theta + \Lambda \right) \theta'^2 + \Lambda \frac{r^2}{\sin^2\theta} + 2g\rho \cos\theta = h.$$

La constante h est la valeur initiale du premier membre. Or $\rho \cos\theta_0$ est égal à z , $\rho \sin\theta_0$ à α ; θ'_0 est la projection de ω sur une horizontale perpendiculaire à GP et dont les cosinus directeurs sont $-\frac{y}{\alpha}, \frac{x}{\alpha}, 0$;

sa valeur $\frac{qx - p\gamma}{\alpha}$ est donnée par la formule (11). Remplaçant les quantités connues par leurs valeurs et faisant les réductions, je trouve

$$h = \frac{5V^2}{18} \frac{14\gamma^2 + 9z^2}{9\rho^2 + 5x^2} + 2gz,$$

valeur essentiellement positive. Si, enfin, dans l'intégrale des forces vives je prends pour inconnue $\rho \cos \theta = \lambda$, au lieu de θ , l'équation peut se mettre sous la forme

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{14\rho^2 - 5\lambda^2}{10} \frac{d\lambda^2}{dt^2} \\ & = \left[\frac{5V^2}{18} \frac{14\gamma^2 + 9z^2}{9\rho^2 + 5x^2} + 2g(z - \lambda) \right] (\rho^2 - \lambda^2) - \frac{5V^2\gamma^2}{18}. \end{aligned} \right.$$

Les variables se séparent et t s'exprime par une intégrale abélienne en λ ; λ lui-même oscille entre deux limites comprises entre $-\rho$ et ρ et toujours différentes. Le cas de $x = 0$ est exclu; si γ est nul, ψ' et φ' le sont aussi; t est encore donné par une intégrale abélienne, mais on voit que le second membre de l'équation (12) s'annule quand λ est égal à $\pm \rho$ ou à

$$\lambda_1 = z + \frac{5V^2z^2}{4(9\rho^2 + 5x^2)g};$$

λ varie entre $-\rho$ et la plus petite des deux quantités λ_1, ρ ; si c'est ρ , le solide tourne toujours dans le même sens autour d'une parallèle à OY menée par le point G; si c'est λ_1 , le sens de la rotation sera variable; si $\lambda_1 = \rho$, GP deviendra vertical au bout d'un temps infini. Quand z est nul, λ varie entre zéro et la racine négative de l'équation

$$\lambda^2 - \frac{5V^2\gamma^2}{36g\rho^2}\lambda - \rho^2 = 0.$$
