Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1900)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 427-430

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__427_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1900).

Mathématiques élémentaires.

O et O′ étant les points d'intersection des côtés opposés d'un quadrilatère Q, on considère le quadrilatère Q′ formé par les bissectrices des angles du quadrilatère Q, de telle sorte que deux côtés opposés de Q′ soient les bissectrices de deux angles opposés de Q.

1° Soit I le point d'intersection des diagonales du quadrilatère Q'; quel est le lieu géométrique du point I lorsque le quadrilatère Q se déforme de façon que, O et O' restant fixes, deux sommets opposés de ce quadrilatère décrivent, respectivement, deux cercles fixes passant chacun par les deux points O et O'?

2° Les trois points O, O' et I restant fixes, et l'un des sommets du quadrilatère Q décrivant une droite Δ, quels sont les lieux géométriques décrits par les trois autres sommets de ce quadrilatère?

Discuter la nature de chacun de ces lieux suivant la position de la droite Δ dans le plan.

3° Calculer les angles et les côtés du quadrilatère Q', connaissant les angles et les côtés du quadrilatère Q.

Montrer que, si l'on désigne par A, B, C, D les angles du quadrilatère Q, et par a', b', c', d' les longueurs des côtés de Q' qui sont, respectivement, les bissectrices de ces angles, on a la relation

$$a' \sin\frac{A}{2} + c' \sin\frac{C}{2} = b' \sin\frac{B}{2} + d' \sin\frac{D}{2}.$$

Mathématiques spéciales.

Étant donnés trois axes Ox, Oy, Oz, on considère un cône du second ordre C tangent aux deux plans xOy et xOz, respectivement, suivant Oy et Oz, et une droite D rencontrant Ox.

1° Pour quelles positions de la droite D existe-t-il au moins une surface du second ordre S, indécomposable, passant par cette droite et tangente au cône C en tous les points d'une courbe plane?

2° La droite D étant située dans le plan xOy et restant fixe, trouver le lieu géométrique des centres des surfaces S.

Ce lieu est un plan P.

3° La droite D se déplaçant dans le plan xOy de façon que le plan P passe par un point donné A de l'espace, trouver l'enveloppe du plan P', et montrer que la droite D enveloppe une parabole Q.

4° Quel est le lieu géométrique des positions du point A pour lesquelles la parabole Q correspondante est égale à une parabole donnée?

5° La droite D étant toujours située dans le plan xOy et restant fixe, on donne un plan quelconque Π. Montrer que le lieu géométrique des points de contact avec le plan Π des surfaces S qui sont tangentes est une droite Δ.

Étudier la distribution des droites Δ dans l'espace quand Π se déplace arbitrairement.

Combien y a-t-il de droites Δ passant par un point quelconque de l'espace?

Quelle est l'enveloppe du plan Π lorsque la droite Δ se déplace dans un plan passant par D?

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne deux sphères fixes S et Σ, la première de centre O et de rayon r, la deuxième de centre ω et de rayon ρ. Soit M un point de la sphère S : on désigne par θ l'angle ωOM, par φ l'angle du plan ωOM avec un plan fixe mené par Oω, et par a la distance des centres Oω.

1° Former la relation différentielle entre θ et φ qui exprime que le point M décrit une courbe C dont les tangentes touchent la sphère Σ.

2° Exprimer, dans ce cas, θ et φ ou leurs lignes trigonométriques en fonction d'un paramètre, en introduisant seulement les transcendantes qu'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques.

3° Discuter, dans les différents cas qui peuvent se présenter, la forme des courbes C et celle de leurs projections sur un plan perpendiculaire à Oω.

4° Quand le point M décrit la courbe C, le point μ où la tangente en M à C touche la sphère Σ décrit une courbe Γ : rectifier la courbe C et établir qu'elle est une développée de Γ : déterminer le plan osculateur, le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe C en chacun de ses points.

5° Rectifier la courbe Γ.

Mécanique rationnelle.

Trouver le mouvement d'une poulie circulaire homogène pesante de masse M, de rayon R et d'épaisseur négligeable, posée sur un axe rigide fixe Ox, sur lequel elle est assujettie à rouler sans glisser, de telle façon que son plan passe constamment par l'axe.

En prenant comme sens positif sur Ox le sens descendant et appelant α l'angle de Ox avec l'horizon, on adjoindra à Ox un axe horizontal fixe Oy et un axe Oz dirigé vers le haut perpendiculairement au plan xOy.

On appellera x l'abscisse OH du point de contact H de la poulie avec l'axe Ox, θ l'angle du plan de la poulie avec le plan vertical xOz. On supposera qu'à l'instant initial, $t = 0$, la poulie est placée sans vitesse dans le plan vertical xOz, au-dessus de Ox, le point de contact en O ($\theta = 0$, $x = 0$), et que l'on applique au centre de la poulie une percussion donnée ayant pour projections respectives Ma, Mb, Mc sur les axes Ox, Oy, Oz.

On calculera les réactions de l'axe sur la poulie, et l'on déterminera l'instant où la poulie se détache de l'axe Ox.

Nota. — On suppose qu'il n'existe aucune résistance au roulement de la poulie sur l'axe.