

ISSALY

Sur le développement de l'équation différentielle des lignes géodésiques d'une surface

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 392-400

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__392_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[05b]

**SUR LE DÉVELOPPEMENT DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE
DES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UNE SURFACE;**

PAR M. l'abbé ISSALY.

De nos recherches antérieures relatives aux lignes remarquables qu'on peut tracer, soit sur les surfaces, soit sur les pseudo-surfaces ⁽¹⁾, il résulte que, *dans les deux cas*, l'équation notamment des lignes géodésiques peut s'écrire ainsi :

(1)
$$d\varphi + r\,ds + r'\,ds' = 0,$$

(¹) Voir *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1897.

les arcs ds , ds' désignant les projections (obliques) de l'arc élémentaire dS de la ligne considérée (S), sur les arêtes MX , MY du trièdre *birectangle* mobile $MXYZ$, supposé d'angle Φ , et φ représentant l'inclinaison des deux arcs ds , dS , l'un sur l'autre.

Comme il ne sera question, dans ce qui doit suivre, que de géodésiques appartenant à des *surfaces*, nous mettrons immédiatement l'équation (1) sous la forme appropriée

$$(1') \quad d\varphi + Ar du + A'r' du' = 0,$$

et notre but principal sera d'obtenir les expressions *vraies* de r , r' , $d\varphi$, en fonction de A , A' , Φ et des dérivées partielles de ces quantités, par rapport aux variables u , u' , fonctions elles-mêmes (si l'on veut) d'une troisième variable, t , par exemple. Pour plus de facilité dans cette recherche, nous distinguerons le cas où Φ est constant d'avec celui où il est variable.

I. PREMIER CAS : *L'angle Φ est constant.* — Et d'abord l'expression des coefficients Ar , $A'r'$ nous est fournie par notre précédente Note (*Nouvelles Annales*, 1900, p. 49), d'après laquelle, toutes *compensations d'erreurs* préalablement écartées, on a, eu égard aux hypothèses $n = r$, $n' = r'$,

$$(2) \quad \begin{cases} Ar = -\frac{1}{A' \sin \Phi} \left(\frac{\partial A}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u} \cos \Phi \right), \\ A'r' = \frac{1}{A \sin \Phi} \left(\frac{\partial A'}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u'} \cos \Phi \right). \end{cases}$$

Il ne reste donc qu'à évaluer $d\varphi$.

Pour y parvenir, nous rappelons qu'en faisant $MM' = dS$, le triangle infinitésimal $M\mu M'$ donne

$$(3) \quad \frac{A du}{\sin \varphi} = \frac{A' du'}{\sin \varphi} = \frac{dS}{\sin \Phi},$$

conjointement avec

$$(4) \quad \Phi = \varphi + \varphi',$$

et

$$(5) \quad dS^2 = A^2 du^2 + A'^2 du'^2 + 2AA' \cos \Phi du du'.$$

De là on tire

$$(6) \quad \begin{cases} d(A du) \sin \Phi = d^2 S \sin \varphi' + dS d\varphi' \cos \varphi', \\ d(A' du') \sin \Phi = d^2 S \sin \varphi + dS d\varphi \cos \varphi. \end{cases}$$

Éliminant $d^2 S$ et observant que, par supposition, $d\varphi' = -d\varphi$, il vient, en tenant compte de (3),

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} d\varphi &= \frac{\sin \Phi}{dS^2} \left[AA'(du d^2 u' - du' d^2 u) \right. \\ &\quad + \left(A \frac{\partial A'}{\partial u} - A' \frac{\partial A}{\partial u} \right) du^2 du' \\ &\quad \left. + \left(A \frac{\partial A'}{\partial u'} - A' \frac{\partial A}{\partial u'} \right) du du'^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Ceci posé, remontons à l'équation (1). Si l'on y substitue les valeurs (2), (5) et (7), on en déduira, pour la solution du cas restreint qui nous occupe, l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &(du d^2 u' - du' d^2 u) \sin^2 \Phi \\ &= \frac{A}{A'^2} \left(\frac{\partial A}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u} \cos \Phi \right) du^3 \\ &+ \left[\left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} - \frac{2}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u} \right) \sin^2 \Phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{A'} \left(\frac{\partial A}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u} \cos \Phi \right) \cos \Phi \right] du^2 du' \\ &- \left[\left(\frac{1}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u'} - \frac{2}{A} \frac{\partial A}{\partial u'} \right) \sin^2 \Phi \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{A'} \left(\frac{\partial A'}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u'} \cos \Phi \right) \cos \Phi \right] du du'^2 \\ &- \frac{A'}{A^2} \left(\frac{\partial A'}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u'} \cos \Phi \right) du'^3. \end{aligned} \right.$$

Cette équation, dont nous garantissons l'exactitude, est, comme on devait s'y attendre, parfaitement symétrique en u, u', A, A' .

Bien qu'elle tire sa simplicité (relative) de ce fait que $\sin \Phi$ et $\cos \Phi$ s'y trouvent mis *tous deux* en évidence, il sera toutefois loisible d'éliminer, dans certaines applications, ces deux lignes trigonométriques à l'aide des relations usuelles

$$(9) \quad \cos \Phi = \frac{B''}{A A'}, \quad \sin \Phi = \frac{1}{A A'} \sqrt{A^2 A'^2 - B''^2}.$$

Pas ne sera besoin, à coup sûr, de cette substitution, si l'on veut envisager le cas particulier, mais très important, où l'angle Φ des coordonnées est droit. On a alors, en effet, aussitôt

$$(8') \quad \left\{ \begin{aligned} & du \, d^2 u' - du' \, d^2 u \\ &= \frac{A}{A'^2} \frac{\partial A}{\partial u'} du^3 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} - \frac{2}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u} \right) du^2 du' \\ &\quad - \left(\frac{1}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u'} - \frac{2}{A} \frac{\partial A}{\partial u} \right) du \, du'^2 \\ &\quad - \frac{A'}{A^2} \frac{\partial A'}{\partial u} du'^3. \end{aligned} \right.$$

Mettons nos résultats à l'épreuve à l'aide de cette dernière forme, et choisissons pour cela l'hélicoïde gauche, représenté par le système

$$x_0 = \rho \cos \theta, \quad y_0 = \rho \sin \theta, \quad z_0 = a \theta.$$

On s'assurera avant tout qu'avec ces données,

$$A = \sqrt{\rho^2 + a^2}, \quad A' = 1, \quad \Phi = \frac{\pi}{2},$$

et que dès lors c'est bien la formule (8') qui est *directement* en cause. Posant $u = \theta$, $u' = \rho$ et adoptant θ pour variable indépendante, ce qui implique $d^2 u = d^2 \theta = 0$,

on trouvera pour équation des lignes géodésiques de la surface proposée

$$\left(\rho + \frac{\alpha^2}{\rho}\right) \frac{d^2 \rho}{d\theta^2} - 2 \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 - (\rho^2 + \alpha^2) = 0,$$

équation exacte dont l'intégration, on le sait, est possible.

Comme *transition* avec le cas où l'angle Φ varie, il est à propos de remarquer qu'en différenciant, dans cette seconde hypothèse, la valeur (9) de $\cos \Phi$, par rapport à u , par exemple, on en déduit

$$AA' \frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin \Phi = - \frac{\partial B''}{\partial u} + \cos \Phi \left(A' \frac{\partial A}{\partial u} + A \frac{\partial A'}{\partial u} \right),$$

ou bien

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \sqrt{A^2 A'^2 - B''^2} = - \frac{\partial B''}{\partial u} + B'' \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{1}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u} \right).$$

Donc, pour exprimer, avec le nouveau paramètre B'' , que $\Phi = \text{const.}$, il est nécessaire et suffisant de poser la condition

$$\frac{\partial B''}{\partial u} = B'' \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{1}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u} \right).$$

La deuxième variable conduirait évidemment au même résultat en u' .

II. DEUXIÈME CAS : *L'angle Φ est variable.* — L'équation des lignes géodésiques admet alors, tant pour les pseudo-surfaces que pour les surfaces, la double forme que voici :

$$(10) \quad \begin{cases} d\varphi + r ds + r' ds' = 0, \\ d\varphi' - n ds - n' ds' = 0, \end{cases}$$

formes équivalentes, dans la seconde desquelles,

$$(11) \quad n = r + \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad n' = r' + \frac{\partial \Phi}{\partial s'}.$$

Je dis équivalentes, car, par addition, on en déduit l'identité

$$d\varphi + d\varphi' = d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial s} ds + \frac{\partial\Phi}{\partial s'} ds'.$$

Dans le cas spécial des surfaces, il y a lieu de mettre le système (10) sous la forme particulière

$$(10') \quad \begin{cases} d\varphi + A r du + A' r' du' = 0, \\ d\varphi' - A n du + A' n' du' = 0, \end{cases}$$

avec

$$(11') \quad n = r + \frac{1}{A} \frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad n' = r' + \frac{1}{A'} \frac{\partial\Phi}{\partial u'}.$$

Bien plus, comme il importe de diriger dès à présent les nouveaux calculs de façon à leur donner toute la symétrie possible, c'est par l'équation combinée

$$(12) \quad d\varphi - d\varphi' + A(n + r) du + A'(n' + r') du' = 0,$$

qu'il convient de remplacer le système (10').

Cela étant, d'après la Note déjà citée, nous avons

$$(13) \quad \begin{cases} A n = A r + \frac{\partial\Phi}{\partial u} = -\frac{1}{A' \sin \Phi} \left(\frac{\partial A}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u} \cos \Phi \right), \\ A' r' = A n' - \frac{\partial\Phi}{\partial u'} = \frac{1}{A \sin \Phi} \left(\frac{\partial A'}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u'} \cos \Phi \right); \end{cases}$$

d'où l'on tire aisément

$$(14) \quad \begin{cases} A(n + r) = -\frac{\partial\Phi}{\partial u} - \frac{2}{A' \sin \Phi} \left(\frac{\partial A}{\partial u'} - \frac{\partial A'}{\partial u} \cos \Phi \right), \\ A'(n' + r') = \frac{\partial\Phi}{\partial u'} - \frac{2}{A \sin \Phi} \left(\frac{\partial A'}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u'} \cos \Phi \right). \end{cases}$$

Il n'y a donc plus qu'à connaître la différence $d\varphi - d\varphi'$.

A cet effet, nous ferons observer que les formules initiales (3), (4) et (5) restent les mêmes, que Φ soit constant ou non. Mais il n'en est pas ainsi du système (6),

car, dans ce second cas, il devient

$$(15) \quad \begin{cases} d(A du) \sin \Phi + (A du) \cos \Phi d\Phi \\ \quad = d^2 S \sin \varphi' + dS \cos \varphi' d\varphi', \\ d(A' du') \sin \Phi + (A' du') \cos \Phi d\Phi \\ \quad = d^2 S \sin \varphi + dS \cos \varphi d\varphi. \end{cases}$$

Éliminant à nouveau $d^2 S$ et remplaçant dans l'équation résultante, une première fois, $d\varphi'$ par $d\Phi - d\varphi$; une deuxième fois, $d\varphi$ par $d\Phi - d\varphi'$, on obtient, de la sorte, deux équations qui, combinées entre elles, fournissent la différence cherchée, savoir

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} d\varphi - d\varphi' &= \frac{2 \sin \Phi}{dS^2} \left[AA' (du d^2 u' - du' d^2 u) \right. \\ &\quad + \left(A \frac{\partial A'}{\partial u} - A' \frac{\partial A}{\partial u} \right) du^2 du' \\ &\quad + \left. \left(A \frac{\partial A'}{\partial u'} - A' \frac{\partial A}{\partial u'} \right) du du'^2 \right] \\ &\quad + (A'^2 du'^2 - A^2 du^2) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} du + \frac{\partial \Phi}{\partial u'} du' \right). \end{aligned} \right.$$

Ce point acquis, si l'on compare cette dernière expression avec la formule similaire (7), on reconnaîtra aussitôt que la substitution, actuellement à faire, des valeurs (5), (14) et (16) dans l'équation (12), donnera nécessairement lieu à des calculs de réduction (en majeure partie) *identiques* à ceux qui ont été exécutés dans le premier cas, si bien qu'abstraction faite du facteur 2 (destiné d'ailleurs à disparaître à la fin des opérations) les seuls nouveaux termes à considérer sont ceux qui renferment les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial u'}$. Or il se trouve que ces termes se réduisent à *quatre*, constituant la somme suivante

$$\begin{aligned} \frac{A}{A'} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin \Phi du^3 + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \sin \Phi \cos \Phi du^2 du' \\ - \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \sin \Phi \cos \Phi du du'^2 - \frac{A'}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial u'} du'^3, \end{aligned}$$

et que tout se réduit, par suite, à les répartir, un par un, dans chacun des quatre coefficients du second membre de (8).

Moyennant ces indications, il nous paraît superflu d'écrire *in extenso* la formule relative à ce second cas. Disons seulement qu'en vertu de ce qui précède, elle ne le cédera pas en symétrie à celle du premier.

Que s'il devenait utile d'y remplacer Φ par le paramètre B'' , il suffirait d'adjoindre aux relations (9) celles-ci

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \sqrt{A^2 A'^2 - B''^2} = - \frac{\partial B''}{\partial u} + B'' \left(\frac{1}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u} \right),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \sqrt{A^2 A'^2 - B''^2} = - \frac{\partial B''}{\partial u'} + B'' \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial u'} + \frac{1}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u'} \right),$$

dont la première a été signalée déjà dès le premier cas.

Nous terminerons notre travail par la remarque suivante :

Si le *développement* de l'équation différentielle des lignes géodésiques constitue un polynôme d'une étendue peu commune, par contre, l'équation elle-même de ces lignes peut être *condensée* dans une formule très simple.

En effet, en développant dans (10) ou (10') les différentielles totales $d\varphi$ et $d\varphi'$, on déduira sans peine de l'un ou l'autre de ces systèmes, joints aux relations (3),

$$\frac{1}{A'} \frac{\partial \varphi}{\partial u'} \sin \varphi - \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi'}{\partial u} \sin \varphi' + n \sin \varphi' + r' \sin \varphi = 0.$$

Substituant à n et à r' leurs valeurs (13), il vient

$$\frac{\partial A}{\partial u'} \cos \varphi - A \frac{\partial \varphi}{\partial u'} \sin \varphi = \frac{\partial A'}{\partial u} \cos \varphi' - A \frac{\partial \varphi'}{\partial u} \sin \varphi',$$

ou, plus simplement,

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial u'} (A \cos \varphi) = \frac{\partial}{\partial u} (A' \cos \varphi').$$

Telle est, sous sa forme, on peut le dire, la plus simple, l'équation des lignes géodésiques d'une surface donnée. Son interprétation est facile.

On a effectivement, dans tous les cas,

$$dS = ds \cos \varphi + ds' \cos \varphi',$$

et pour les surfaces, en particulier,

$$dS = A \cos \varphi \, du + A' \cos \varphi' \, du'.$$

Or si l'on écrit la condition *d'intégrabilité* de cette valeur de dS , on retombera précisément sur l'équation (17).