

HENRI PICCIOLI

**Sur les développements de certaines  
lignes en  $S_n$  et sur une propriété  
caractéristique des courbes hypersphériques  
à courbure constante**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 19  
(1900), p. 385-390

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1900\\_3\\_19\\_\\_385\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__385_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

[Q2]

**SUR LES DÉVELOPPANTES DE CERTAINES LIGNES EN  $S_n$  <sup>(1)</sup>  
ET SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES COURBES  
HYPERSPHÉRIQUES A COURBURE CONSTANTE;**

PAR M. HENRI PICCIOLI.

1. Proposons-nous de résoudre la question que voici :

*Chercher s'il y a des courbes en  $S_n$  telles que leurs développantes soient des lignes sphériques.*

Soient  $y_1, y_2, \dots, y_n$  les coordonnées d'un point fixe dans l' $S_n$ ,

$$x_1 = x_1(s), \quad x_2 = x_2(s), \quad x_n = x_n(s)$$

les équations d'une ligne L dont  $s$  est l'arc,

$$(1) \quad x'_1 = x_1 - s\alpha_{11}, \quad x'_2 = x_2 - s\alpha_{12}, \quad x'_n = x_n - s\alpha_{1n}$$

celles d'une de ses développantes L'. Posons, R étant une constante,

$$\Sigma_i (y_i - x_i + s\alpha_{1i})^2 = R^2,$$

En différentiant, on obtient

$$\Sigma_i (y_i - x_i) \alpha_{2i} = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_2 = 0.$$

Nous en concluons, d'après un théorème connu, que :

---

(<sup>1</sup>) Par *ligne en  $S_n$* , l'auteur entend une ligne dans un espace à  $n$  dimensions.

*A. Les courbes qui ont pour développantes des lignes sphériques sont les géodésiques des cônes ayant pour sommet le centre de la sphère.*

On pouvait arriver plus rapidement à ce résultat, en observant que des formules (1) l'on tire

$$(2) \quad \alpha'_{1i} = -\alpha_{2i},$$

$\alpha'_{11}, \alpha'_{12}, \dots, \alpha'_{1n}$  étant les cosinus directeurs de la tangente à  $L'$  et  $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}$  ceux de la normale principale de  $L$ . Alors il s'ensuit que l'on a

$$(3) \quad A'_1 = -A_2,$$

d'où la propriété dont il s'agit.

La même formule (3) nous montre que les courbes qui ont les plans rectifiants tangents à une sphère admettent pour développantes des courbes qui ont leurs plans normaux tangents à une sphère concentrique.

2. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe quelconque en  $S_n$ ; lorsqu'un point se meut sur cette courbe pour la parcourir tout entière, le plan hyperosculateur en ce point enveloppe une surface à  $(n-1)$  dimensions  $\Sigma_{n-1}$  constituée par les  $\infty^1 S_{n-2}$  osculateurs à  $\mathcal{C}$ . En nous bornant au cas où la dernière direction principale de  $\mathcal{C}$  coupe sous un angle constant une direction donnée  $d$ , si nous considérons une géodésique de  $\Sigma_{n-1}$ , l'on voit tout de suite que sa normale principale coupe  $d$  sous un angle constant et, par conséquent, ses développantes, à cause des formules (2), sont des hélices cylindriques.

On a donc le théorème suivant :

*A'. Les géodésiques de la surface engendrée par les  $S_{n-2}$  osculateurs d'une courbe dont la dernière direction principale coupe, sous un angle constant, une di-*

*rection fixe, ont pour développantes des hélices cylindriques.*

*Remarque.* — On énonce ce théorème en  $S_3$  en disant que les développantes des géodésiques d'un hélicoïde développable sont des hélices cylindriques. La raison pour laquelle nous en avons modifié l'énoncé en l'étendant à l' $S_n$ , c'est que les courbes de  $S_n$  qui ont la dernière direction principale inclinée d'un angle constant sur une direction donnée, ne rentrent plus dans la classe des hélices cylindriques lorsque  $n$  est égal ou supérieur à 4.

Cependant, on peut trouver des lignes jouissant des deux propriétés : ainsi, par exemple, en  $S_4$  on a les hélices dans lesquelles le premier et le troisième rayon de courbure sont égaux, et le théorème qui précède leur est applicable.

On a aussi cet énoncé :

*Les courbes de  $S_{2h+1}$  définies par les équations*

$$\frac{R_2}{R_1} = a_1, \quad \frac{R_4}{R_3} = a_2, \quad \dots, \quad \frac{R_{2h}}{R_{2h-1}} = a_h,$$

*les quantités  $a$  étant des constantes, sont telles que leurs directions impaires coupent sous un angle constant une direction donnée, pendant que les autres lui sont perpendiculaires.*

A ces courbes, de même que celles à courbures constantes de  $S_{2h+1}$  qui en sont un cas particulier, est aussi applicable le théorème que nous venons d'exprimer.

3. Le théorème A' peut s'appliquer même aux géodésiques de la surface à  $(n-1)$  dimensions enveloppée par les  $S_{n-1}$  passant par un point fixe et tangente à une hypersphère de  $S_n$ .

Comme cas particulier, faisons ici  $n = 3$  et joignons-y

le résultat du théorème A. On obtient la proposition que voici :

*Les développantes des géodésiques du cône de rotation de l'espace ordinaire sont des hélices sphériques.*

Cependant ce théorème n'est pas complet. On sait, en effet, que dans l' $S_4$  on peut trouver des lignes qui soient à la fois géodésiques d'un cylindre et d'un cône, ce qui ne peut pas arriver en  $S_3$ . Or, si nous appliquons à ces courbes le résultat obtenu par le théorème A, en rappelant que les développantes des hélices cylindriques de  $S_4$  sont des courbes de  $S_3$ , l'on voit tout de suite que ces *géodésiques cylindro-coniques* de  $S_4$  ont elles-mêmes pour développantes des hélices sphériques de  $S_3$  et que, par conséquent, la proposition qui précède peut se compléter ainsi :

*Les courbes qui ont pour développantes des hélices sphériques de  $S_3$  sont les géodésiques du cône de révolution de  $S_3$  et les géodésiques cylindro-coniques de  $S_4$ .*

Ce théorème, comme on le reconnaît facilement, peut s'étendre à l'espace à  $n$  dimensions.

4. Avant d'étudier les courbes hypersphériques à courbures constantes il faut rappeler que ces courbes ne peuvent exister que dans un espace à un nombre pair de dimensions, comme l'a démontré M. Brunel, et que l'équation différentielle qui lie les  $2p - 1$  rayons de courbure d'une courbe hypersphérique générale de  $S_{2p}$  est représentée par

$$H_{2p} = 0,$$

$$H_m = \frac{d}{ds} (R_{m-1} H_{m-1}) + \frac{R_{m-2} H_{m-2}}{R_{m-1}}$$

étant la relation qui fait dépendre un  $H_m$  quelconque des deux qui le précèdent; on a en outre

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \frac{dR_1}{ds}.$$

Cela posé, l'on voit immédiatement que pour qu'une courbe hypersphérique de  $S_{2p}$  soit à courbures constantes, il faut et il suffit que l'on ait

$$H_{2i} = 0, \quad H_{2i-1} = h_i \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

les  $h$  étant des constantes différentes entre elles. Or, si nous prenons les formules

$$\frac{dA_t}{ds} = \frac{A_{t+1}}{R_t} - \frac{A_{t-1}}{R_{t-1}} \quad (t = 1, 2, \dots, p),$$

de l'hypothèse

$$A_1 = 0$$

qui caractérise les courbes hypersphériques, quelle que soit la dimension de l'espace ambiant, il résulte

$$A_t = R_{t-1} H_{t-1}.$$

En conséquence, nous avons pour une courbe hypersphérique de  $S_{2p}$ ,

$$A_{2i-1} = 0, \quad A_{2i} = h_i R_{2i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Donc on peut énoncer le théorème que voici :

*Pour qu'une courbe de  $S_{2i}$  soit à courbures constantes, il faut et il suffit que les hyperplans à index impair passent tous par un même point P et que les autres demeurent tangents à des sphères de centre P dont les rayons varient, en général, avec l'index.*

Ce qui nous donne la propriété caractéristique que nous cherchions.

Remarquons en passant que  $A_2$  étant constant, les dé-

( 390 )

veloppantes de ces courbes rentrent dans la catégorie de celles définies par l'équation

$$A_1 = \text{const.}$$

applicable aux courbes ayant les hyperplans normaux tangents à une hypersphère.