

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 335-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__335_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 1793 et 1794.

(1898, p. 195-196.)

1793. Si S_2 désigne un carré ou une somme de carrés tous différents entre eux, tout nombre entier est de la forme $S_2 + p$ ($p = 0, 1, 2, 4$). (E. LEMOINE.)

1794. S_3 représentant un cube ou une somme de cubes tous différents et p_1 l'un des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, tout nombre entier est de la forme $S_3 + p_1$, au moins pour une valeur de p_1 . (E. LEMOINE.)

SOLUTION

Par M. L. RIPERT.

Démontrons d'abord le théorème suivant : *Tout nombre entier est de la forme $S_n + p_1$, n étant un nombre arbitrairement choisi, S_n représentant une $n^{\text{ième}}$ puissance ou somme de $n^{\text{ièmes}}$ puissances toutes différentes et p un nombre moindre que $(n+1)^n - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \lambda^n$.*

En effet, l'équation $2x^n - (x+1)^n = 0$ a une seule racine positive comprise entre n et $n+1$. Il en résulte que, a^n étant la plus grande $n^{\text{ième}}$ puissance contenue dans un nombre A , et en supposant $a > n$, on a toujours $A - a^n = B (< a^n)$. De même, et avec la même condition : $B - b^n = C (< b^n)$, $C - c^n = D (< c^n)$, Par suite :

$$A = a^n + b^n + c^n + \dots + k^n + p,$$

avec $a > b > \dots > k > n$, et $p < (n+1)^n$.

Les puissances $a_1^n \dots k^n$ sont donc toutes différentes, et une limite supérieure de p est $(n+1)^n - 1$.

Le plus petit nombre k étant au moins égal à $n+1$, on peut retrancher la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances moindres que $(n+1)^n$ et le maximum de p est $p_m = (n+1)^n - \sum_1^n \lambda^n - 1$.

C. Q. F. D.

La limite supérieure $[p = (n+1)^n - 1]$ suffit pour démontrer les théorèmes 1793 et 1794.

En effet, si $n = 2$, p ne peut dépasser $8 = 2^2 + 4$ (d'où $p_1 = 4$). On a ensuite

$$p = 7 = 1^2 + 2^2 + 2 \quad (p_1 = 2),$$

$$p = 6 = 1^2 + 2^2 + 1 \quad (p_1 = 1),$$

$$p = 5 = 1^2 + 2^2 \quad (p_1 = 0),$$

$$p = 4 = 2^2 \quad (p_1 = 0),$$

$$p = 3 = 1^2 + 2 \quad (p_1 = 2),$$

$$p = 2,$$

$$p = 1.$$

A cause de $8 = 2^2 + 4 = 1^2 + 2^2 + 3$, on peut remplacer ($p = 0, 1, 2, 4$) par ($p = 0, 1, 2, 3$).

Si $n = 3$, p ne peut dépasser $63 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 27$ (d'où $p_1 = 27$). On a ensuite :

$$62 = 2^3 + 3^3 + 27 \quad (p_1 = 27),$$

$$61 = 1^3 + 3^3 + 33 \quad (p_1 = 33),$$

$$\dots\dots\dots \dots\dots\dots,$$

$$56 = 1^3 + 3^3 + 28 \quad (p_1 = 28),$$

et l'on reconnaît aisément que tous les nombres inférieurs sont de la forme $s_3 + p_1$, s_3 étant l'un ou la somme de deux ou trois des cubes (1, 8, 27) et p_1 ayant l'une des valeurs inférieures à 28 indiquées par l'énoncé 1794. On peut, dans cet énoncé, retrancher de la suite p_1 les nombres 3, 11, 13, 15 qui ne sont pas indispensables à la décomposition des nombres inférieurs à 64. Enfin, à cause de $33 = 2^3 + 25$, ..., $28 = 2^3 + 20$, on peut adopter le maximum $p_m = 27$, à la condition de remplacer (28, 29, 30, 31, 32, 33) par (20, 21, 22, 23, 24, 25).

Pour $n = 4, 5, \dots$, on a

$$p' = 624, 7775, \quad \dots,$$

$$p_m = 270, 3350, \quad \dots$$

Autres solutions de M. MERLIN.
