

Résumé des principales formules de la théorie des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 2-11

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__2_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES FORMULES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES (¹).

FONCTIONS DE WEIERSTRASS.

Développements en produits et séries infinis.

$$\sin u = u \prod' \left(1 - \frac{u}{m\pi} \right) e^{\frac{u}{m\pi}},$$

$$\cot u = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u - m\pi} + \frac{1}{m\pi} \right),$$

$$\frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \sum' \frac{1}{(u - n\pi)^2}.$$

$$(w = 2m\omega + 2n\omega'),$$

$$\sigma u = u \prod' \left(1 - \frac{u}{w} \right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{w^2}},$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

$$p u = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right],$$

$$- \frac{1}{2} p' u = \sum' \frac{1}{(u - w)^3}.$$

(¹) Les candidats à l'Agrégation de Mathématiques seront autorisés à se servir, pour les compositions écrites, de ce Tableau qu'ils trouveront à la librairie Gauthier-Villars.

Développements en séries entières.

$$\sigma u = u + \star - \frac{g_2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} u^5 - \frac{g_3}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^7 - \frac{g_2^2}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} u^9 - \dots,$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \star - \frac{g_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} u^3 - \frac{g_3}{2^2 \cdot 5 \cdot 7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} u^7 - \dots,$$

$$p u = \frac{1}{u^2} + \star + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^8 + \dots$$

$$g_2 = 60 \sum' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 140 \sum' \frac{1}{w^6}.$$

Relations entre $p u$ et ses dérivées.

$$p'^2 u = 4 p^3 u - g_2 p u - g_3 = 4(p u - e_1)(p u - e_2)(p u - e_3),$$

$$p'' u = 6 p^2 u - \frac{1}{2} g_2,$$

$$p''' u = 12 p u p' u.$$

Homogénéité.

$$\sigma(\mu u \mid \mu \omega, \mu \omega') = \mu \sigma(u \mid \omega, \omega'),$$

$$\zeta(\mu u \mid \mu \omega, \mu \omega') = \frac{1}{\mu} \zeta(u \mid \omega, \omega'),$$

$$p(\mu u \mid \mu \omega, \mu \omega') = \frac{1}{\mu^2} p(u \mid \omega, \omega').$$

$$g_2(\mu \omega, \mu \omega') = \frac{1}{\mu^4} g_2(\omega, \omega'),$$

$$g_3(\mu \omega, \mu \omega') = \frac{1}{\mu^6} g_3(\omega, \omega').$$

Dégénérescence.

$$1^\circ \quad \omega' = \infty:$$

$$p u = -\frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^2 \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi u}{2\omega} \right)},$$

$$\left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^2 = \frac{9g_3}{2g_2}, \quad e_1 = \frac{3g_3}{g_2}, \quad e_2 = e_3 = -\frac{3g_3}{2g_2};$$

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 0.$$

$$\zeta u = \frac{\pi}{2\omega} \cotang \frac{\pi u}{2\omega} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega} \right)^2 u,$$

$$\sigma u = e^{\frac{1}{6} \left(\frac{\pi u}{2\omega} \right)^2} \frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega}.$$

(4)

2° $\omega = \infty, \omega' = \infty$:

$$\begin{aligned} pu &= \frac{1}{u^2}, & \zeta u &= \frac{1}{u}, & \sigma u &= u, \\ e_1 = e_2 = e_3 &= 0, & g_2 &= 0, & g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Périodicité et formules d'addition.

$$\begin{aligned} p(u + 2\omega) &= pu, \\ p(u + 2\omega') &= pu, \\ \zeta(u + 2\omega) &= \zeta u + 2\eta, & \eta &= \zeta\omega, \\ \zeta(u + 2\omega') &= \zeta u + 2\eta', & \eta' &= \zeta\omega', \\ \sigma(u + 2\omega) &= -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u, \\ \sigma(u + 2\omega') &= -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma u, \\ \sigma(u + 2m\omega + 2n\omega') &= (-1)^{mn+m+n}e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')}\sigma u; \\ \eta\omega' - \omega\eta' &= \frac{1}{2}\pi i, \end{aligned}$$

le coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ étant supposé positif.

$$\begin{aligned} pu - pv &= -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v}, \\ \frac{p'u}{pu - pv} &= \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u, \\ \frac{-p'v}{pu - pv} &= \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v, \\ \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} &= \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v, \\ pu - p(u+v) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right), \\ pu + pv + p(u+v) &= \frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2, \\ p(u+\omega) - e_1 &= \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{pu - e_1}, \\ p(u+\omega+\omega') - e_2 &= \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{pu - e_2}, \\ p(u+\omega') - e_3 &= \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pu - e_3}. \end{aligned}$$

Racines e_1, e_2, e_3 . — *Fonctions* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$e_1 = p\omega, \quad e_2 = p(\omega + \omega'), \quad e_3 = p\omega',$$

$$p'u = -2 \frac{\sigma(u - \omega) \sigma(u - \omega') \sigma(u + \omega + \omega')}{\sigma\omega \sigma\omega' \sigma(\omega + \omega') \sigma^3 u},$$

$$\sigma_1 u = e^{\eta u} \frac{\sigma(\omega - u)}{\sigma\omega},$$

$$\sigma_2 u = e^{(\eta + \eta')u} \frac{\sigma(\omega + \omega' - u)}{\sigma(\omega + \omega')},$$

$$\sigma_3 u = e^{\eta' u} \frac{\sigma(\omega' - u)}{\sigma\omega'};$$

$$pu - e_1 = \left(\frac{\sigma_1 u}{\sigma u} \right)^2, \quad pu - e_2 = \left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \right)^2, \quad pu - e_3 = \left(\frac{\sigma_3 u}{\sigma u} \right)^2;$$

$$p'u = - \frac{2\sigma_1 u \sigma_2 u \sigma_3 u}{\sigma^3 u}.$$

Les fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont paires.

$$\frac{d}{du} \frac{\sigma u}{\sigma_\lambda u} = \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\lambda u} \frac{\sigma_\nu u}{\sigma_\lambda u}, \quad \frac{d}{du} \frac{\sigma_\mu u}{\sigma_\nu u} = -(e_\mu - e_\nu) \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma_\nu u} \frac{\sigma u}{\sigma_\nu u},$$

$$\frac{d}{du} \frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u} = - \frac{\sigma_\mu u}{\sigma u} \frac{\sigma_\nu u}{\sigma u}.$$

Valeurs réelles de pu *quand* ω *et* $\frac{\omega'}{i}$ *sont réelles.*

Considérons le rectangle de sommets $0, \omega, \omega + \omega', \omega'$.
Quand l'argument u décrit le contour de ce rectangle dans le sens $0, \omega, \omega + \omega', \omega', 0$, la fonction pu diminue constamment de $+\infty$ à $-\infty$:

1° Quand u va de 0 à ω , pu est réel et décroît de ∞ à e_1 ; $p'u$ est négatif.

2° Quand u va de ω à $\omega + \omega'$, pu décroît de e_1 à e_2 , $p'u$ est purement imaginaire positive.

3° La variable u allant de $\omega + \omega'$ à ω' , pu décroît de e_2 à e_3 , $p'u$ est réelle et positive.

4° Enfin u revenant de ω' à 0, pu décroît de e_3 à $-\infty$; $p'u$ est purement imaginaire négative.

En tout point pris dans le rectangle, pu est imaginaire.

FONCTIONS DE JACOBI.

Séries trigonométriques.

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad v = \frac{\pi u}{2K},$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q} \sin v - 2\sqrt[4]{q^9} \sin 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin 5v - \dots,$$

$$H_1(u) = 2\sqrt[4]{q} \cos v + 2\sqrt[4]{q^9} \cos 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}} \cos 5v + \dots,$$

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos 2v + 2q^4 \cos 4v - 2q^9 \cos 6v + \dots,$$

$$\Theta_1(u) = 1 + 2q \cos 2v + 2q^4 \cos 4v + 2q^9 \cos 6v + \dots$$

$\lambda = e^{-\frac{i\pi}{2K}(2n+iK')},$	<i>Zéros de</i>	$H(u)$	$2mK + 2niK',$
$H_1(u) = H(u + K),$	»	$H_1(u)$	$(2m+1)K + 2niK',$
$\Theta(u) = \frac{1}{i\lambda} H(u + iK'),$	»	$\Theta(u)$	$2mK + (2n+1)iK',$
$\Theta_1(u) = \frac{1}{\lambda} H(u + K + iK'),$	»	$\Theta_1(u)$	$(2m+1)K + (2n+1)iK'.$

Produits infinis.

$$v = \frac{\pi u}{2K}, \quad \Lambda = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \dots,$$

$$H(u) = \Lambda 2\sqrt[4]{q} \sin v (1 - 2q^2 \cos 2v + q^4) (1 - 2q^4 \cos 2v + q^8) \dots;$$

$$H_1(u) = \Lambda 2\sqrt[4]{q} \cos v (1 + 2q^2 \cos 2v + q^4) (1 + 2q^4 \cos 2v + q^8) \dots,$$

$$\Theta(u) = \Lambda (1 - 2q \cos 2v + q^2) (1 - 2q^3 \cos 2v + q^6) \dots,$$

$$\Theta_1(u) = \Lambda (1 + 2q \cos 2v + q^2) (1 + 2q^3 \cos 2v + q^6) \dots$$

Addition d'une demi-période ou d'une période.

$$\begin{aligned}\lambda &= e^{-\frac{i\pi}{iK}(2u+iK')}, & \mu &= e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')}, \\ H(u+K) &= H_1(u), & H(u+iK') &= i\lambda \Theta(u), \\ \Theta(u+K) &= \Theta_1(u), & \Theta(u+iK') &= i\lambda H(u), \\ H_1(u+K) &= -H(u), & H_1(u+iK') &= \lambda \Theta_1(u), \\ \Theta_1(u+K) &= \Theta(u), & \Theta_1(u+iK') &= \lambda H_1(u), \\ H(u+K+iK') &= \lambda \Theta_1(u), & H(u+2iK') &= -\mu H(u), \\ \Theta(u+K+iK') &= \lambda H_1(u), & \Theta(u+2iK') &= -\mu \Theta(u), \\ H_1(u+K+iK') &= -i\lambda \Theta(u), & H_1(u+2iK') &= \mu H_1(u), \\ \Theta_1(u+K+iK') &= i\lambda H(u), & \Theta_1(u+2iK') &= \mu \Theta_1(u).\end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit, nous supposons K et K' particularisés de telle façon que

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^3 + 2q^5 + \dots$$

Relations entre les σ et les fonctions de Jacobi.

$$\begin{aligned}\sigma(u|K, iK') &= \frac{H(u)}{H'(0)} e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{K} u^2}, \\ \sigma_1(u|K, iK') &= \frac{\sigma(K+u)}{\sigma K} e^{-\eta u} = \frac{H_1(u)}{H_1(0)} e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{K} u^2}, \\ \sigma_2(u|K, iK') &= \frac{\sigma(K+iK'+u)}{\sigma(K+iK')} e^{-(\eta+\eta')u} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)} e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{K} u^2}, \\ \sigma_3(u|K, iK') &= \frac{\sigma(iK'+u)}{\sigma iK'} e^{-\eta' u} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{K} u^2}.\end{aligned}$$

Ces formules donnent les fonctions σ construites avec les périodes spéciales K et iK' . D'après les formules d'homogénéité, les fonctions σ construites avec deux périodes ω et ω' , assujetties à la seule condition

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{iK'}{K},$$

s'obtiennent immédiatement :

$$\sigma(u|\omega, \omega') = \frac{\omega}{K} \frac{H\left(\frac{K}{\omega} u\right)}{H'(0)} e^{\frac{1}{2} \frac{\eta}{\omega} u^2},$$

(8)

$$\sigma_1(u|\omega, \omega') = \frac{H_1\left(\frac{K}{\omega}u\right)}{H_1(o)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_2(u|\omega, \omega') = \frac{\Theta_1\left(\frac{K}{\omega}u\right)}{\Theta_1(o)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2},$$

$$\sigma_3(u|\omega, \omega') = \frac{\Theta\left(\frac{K}{\omega}u\right)}{\Theta(o)} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}.$$

FONCTIONS $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \quad \sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)} = \frac{H(o)}{\Theta(o)},$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(o)}{\Theta_1(o)}.$$

Addition d'une demi-période ou d'une période.

$$\operatorname{sn}(u + K) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{sn}(u + iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u + K) = -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{cn}(u + iK') = -i \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{dn}(u + K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{dn}(u + iK') = -i \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u + K + iK') = \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u + K + iK') = \frac{-ik'}{k \operatorname{cn} u}.$$

$$\operatorname{dn}(u + K + iK') = ik' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{sn}(u + 2K) = -\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}(u + 2iK') = \operatorname{sn} u,$$

$$\operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{cn}(u + 2iK') = -\operatorname{cn} u,$$

$$\operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u, \quad \operatorname{dn}(u + 2iK') = -\operatorname{dn} u.$$

Argument purement imaginaire.

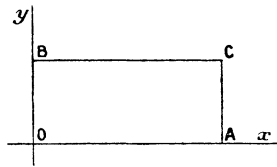
Relation entre pu et sn u.

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(iu | K, iK') &= i \frac{\operatorname{sn}(u | K', iK)}{\operatorname{cn}(u | K', iK)}, & p(u | K, iK') &= -\frac{1+k^2}{3} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}; \\ \operatorname{cn}(iu | K, iK') &= \frac{1}{\operatorname{cn}(u | K', iK)}, & \left\{ \begin{array}{l} p(u | \omega, \omega') = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u \sqrt{e_1 - e_3})}; \\ \omega \sqrt{e_1 - e_3} = K, \quad \omega' \sqrt{e_1 - e_3} = iK'. \end{array} \right. \\ \operatorname{dn}(iu | K, iK') &= \frac{\operatorname{dn}(u | K', iK)}{\operatorname{cn}(u | K', iK)}, \end{aligned}$$

Valeurs réelles de sn u, cn u, dn u quand K et K' sont réels.

$$OA = K, \quad OB = K' \text{ (fig. 1),}$$

Fig. 1.



u	O	A	C	B
$\operatorname{sn} u$	0	1	$\frac{1}{k}$	∞
u	A	O	B	
$\operatorname{cn} u$	0	1	∞	
u	C	A	O	B
$\operatorname{dn} u$	0	k'	1	∞

Formules d'addition.

$$\operatorname{cn} \alpha = \operatorname{cn} u \operatorname{cn}(u - \alpha) + \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u - \alpha) \operatorname{dn} \alpha.$$

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1,$$

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1,$$

$$\operatorname{sn}(u + v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{cn}(u + v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u + v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

Dérivées.

Si l'on suppose, comme dans ce qui précède, K et K' liées par la condition

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$

on a

$$\frac{d(\operatorname{sn} u)}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d(\operatorname{cn} u)}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d(\operatorname{dn} u)}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Développements en séries entières.

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{k} \right),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u = u - 2k\alpha \frac{u^3}{1.2.3} + 4k^2(\alpha^2 + 3) \frac{u^5}{1.2.3.4.5} \\ - 8k^3(\alpha^3 + 33\alpha) \frac{u^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots, \end{aligned}$$

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{u^2}{1.2} + (1 + 4k^2) \frac{u^4}{1.2.3.4} - (1 + 44k^2 + 16k^4) \frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dn} u = 1 - k^2 \frac{u^2}{1.2} + k^2(4 + k^2) \frac{u^4}{1.2.3.4} \\ - k^2(16 + 44k^2 + k^4) \frac{u^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots \end{aligned}$$

Autre notation. Fonctions $\mathfrak{Z}$.

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}, \quad q = e^{\tau\pi i}.$$

$$\mathfrak{Z}_1(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin v\pi - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3v\pi + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5v\pi - \dots,$$

$$\mathfrak{Z}_2(v|\tau) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos v\pi + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3v\pi + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5v\pi - \dots,$$

$$\mathfrak{S}_3(\nu|\tau) = 1 + 2q \cos 2\nu\pi + 2q^4 \cos 4\nu\pi + 2q^9 \cos 6\nu\pi + \dots,$$

$$\mathfrak{S}_0(\nu|\tau) = 1 - 2q \cos 2\nu\pi + 2q^4 \cos 4\nu\pi - 2q^9 \cos 6\nu\pi + \dots$$

$$\mathfrak{S}_0(\nu + \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_3(\nu), \quad \mathfrak{S}_1(\nu + \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_2(\nu),$$

$$\mathfrak{S}_2(\nu + \tfrac{1}{2}) = -\mathfrak{S}_1(\nu), \quad \mathfrak{S}_3(\nu + \tfrac{1}{2}) = \mathfrak{S}_0(\nu).$$

$$\mathfrak{S}_0(\nu + \tfrac{1}{2}\tau) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\nu\pi i} \mathfrak{S}_1(\nu), \quad \mathfrak{S}_1(\nu + \tfrac{1}{2}\tau) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-\nu\pi i} \mathfrak{S}_0(\nu),$$

$$\mathfrak{S}_2(\nu + \tfrac{1}{2}\tau) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-\nu\pi i} \mathfrak{S}_3(\nu), \quad \mathfrak{S}_3(\nu + \tfrac{1}{2}\tau) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-\nu\pi i} \mathfrak{S}_2(\nu).$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma(u) = 2\omega \frac{\mathfrak{S}_1(\nu)}{\mathfrak{S}'_1(0)},$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma_1(u) = \frac{\mathfrak{S}_2(\nu)}{\mathfrak{S}_2(0)}, \quad \nu = \frac{u}{2\omega},$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma_2(u) = \frac{\mathfrak{S}_3(\nu)}{\mathfrak{S}_3(0)},$$

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma_3(u) = \frac{\mathfrak{S}_0(\nu)}{\mathfrak{S}_0(0)}.$$