

E.-M. LÉMERAY

**Exposition géométrique élémentaire
de quelques propriétés fondamentales
des fonctions elliptiques de première
espèce (suite)**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 289-306

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__289_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[F8f] [H11d]

**EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE DE QUELQUES
PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FONCTIONS ELLIP-
TIQUES DE PREMIÈRE ESÈCE (suite) (1);**

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

16. Si nous appelons *période* la plus petite quantité dont doit varier z pour que la fonction reprenne la même valeur, quelle que soit cette valeur, notre représentation géométrique nous la donne et l'on trouve que la distance oo' est égale à 1, 5, ... On pourrait démontrer que la période de la fonction $\operatorname{tang} z$ est précisément la moitié de la période de la fonction $\sin z$.

On voit encore que $\operatorname{tang} z$ s'annule une fois et devient $\pm \infty$ dans l'intervalle d'une période.

De l'existence de la période réelle de la fonction $\operatorname{tang} z$ on conclut l'existence de la période $\pi\sqrt{-1}$ pour la fonction $\operatorname{Th} z$; c'est le résultat auquel nous voulions arriver.

17. On appliquera aisément au cas de $\operatorname{Th} z$ les raisonnements du n° 10.

On trouve alors que, lorsque z décrit une parallèle à l'axe réel ou $\operatorname{Th} z$ décrit l'un des cercles

$$\frac{U^2 + V^2 - 1}{V} = \frac{V_0^2 - 1}{V_0}$$

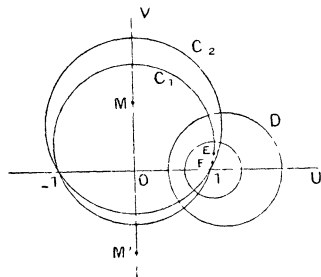
(1) Voir page 255.

qui passent tous par les points $U = \pm 1$ (*fig. 10*) tels que C_1, C_2 . Quand z décrit une parallèle à l'axe imaginaire ov , $Th z$ décrit un des cercles

$$\frac{U^2 + V^2 + 1}{U} = \frac{U_0^2 + 1}{U_0}$$

tels que D ; ces cercles coupent orthogonalement les premiers et n'ont entre eux aucun point commun; ici donc,

Fig. 10.



à part les cercles limites qui se confondent avec les axes, les deux systèmes de courbes sont formés de courbes fermées; il ne faudrait pas en conclure que $Th z$ admet une période réelle et une période imaginaire. Elle admet une période imaginaire; car, lorsque z décrit une parallèle à l'axe imaginaire, le mobile qui figure $Th z$ décrit dans un sens constant un cercle tel que D sans tendre vers une position limite sur ce cercle; on le verrait comme au n° 10 en remarquant que l'équation

$$x = \frac{a+x}{1-ax}$$

a pour racines

$$x = \pm \sqrt{-1},$$

et qu'aucun des cercles D (sauf les cercles limites) ne passe en ces points. Au contraire, quand z décrit une

parallèle à l'axe réel *ou*, le mobile décrit dans son plan un cercle tel que C_1 et suivant le sens du mouvement; il s'approche de l'un des points ± 1 de l'axe réel. Mais nous allons voir qu'il s'en approche *asymptotiquement*. Soit, en effet, E un point du cercle C_1 de coordonnées U, V ; la fonction a la valeur

$$X = U + V\sqrt{-1};$$

on a un autre point E_1 correspondant à la valeur $X_1 = U_1 + V_1\sqrt{-1}$ de la fonction en écrivant

$$X_1 = \frac{a + X}{1 + aX},$$

c'est-à-dire

$$U_1 + V_1\sqrt{-1} = \frac{a + U + V\sqrt{-1}}{1 + a(U + V\sqrt{-1})}.$$

Si, par exemple, V est positif, V_1 sera aussi positif. Pour le prouver il suffit de montrer que l'argument du numérateur est plus grand que celui du dénominateur. Désignons respectivement ces arguments par φ et ψ . On a

$$\tan \varphi = \frac{V}{a + U}, \quad \tan \psi = \frac{aV}{1 + aU}.$$

Si U est positif (c'est le cas du point E), les deux tangentes sont positives et les arcs étant plus petits que $\frac{\pi}{2}$ sont positifs. On a

$$\tan \varphi - \tan \psi = \frac{V(1 - a^2)}{(a + U)(1 + aU)}.$$

$1 - a^2$ est positif puisque a est plus petit que 1; donc $\tan \varphi - \tan \psi$ est positif; il en est de même de $\varphi - \psi$; E_1 est donc du même côté que E par rapport à l'axe OU ; donc le mobile s'approche asymptotiquement soit du point $+1$, soit du point -1 ; et il ne revient jamais à

son point de départ. $\text{Th}z$ n'a donc pas la période réelle.

$\text{Th}z$ ayant seulement une période imaginaire, le plan uov des z est partagé en bandes par des parallèles à l'axe ou ou au lieu de parallèles à l'axe ov comme dans le cas de $\sin z$.

Les énoncés du n° 12 sont applicables en remplaçant les ellipses par les cercles qui passent aux points ± 1 .

III. — LA FONCTION sn .

18. Considérons maintenant une fonction, que nous désignerons par sn , admettant le théorème d'addition

$$\begin{aligned} \text{sn}(p+q) \\ = \frac{\text{sn} p \sqrt{1-\text{sn}^2 q} \sqrt{1-k^2 \text{sn}^2 p} + \text{sn} q \sqrt{1-\text{sn}^2 p} \sqrt{1-k^2 \text{sn}^2 q}}{1-k^2 \text{sn}^2 p \text{sn}^2 q}, \end{aligned}$$

dans laquelle k désigne un nombre positif plus petit que 1, et satisfaisant aux conditions

$$\text{sn}(0) = 0, \quad \left(\frac{d \text{sn} p}{dp} \right)_{p=0} = 1.$$

Posons

$$\text{sn}(p+q) = y, \quad \text{sn} p = a, \quad \text{sn} q = x;$$

on a

$$(5) \quad y = \frac{a \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 a^2} + x \sqrt{1-a^2} \sqrt{1-k^2 x^2}}{1-k^2 a^2 x^2}.$$

Dans cette relation a désignera un nombre positif plus petit que 1.

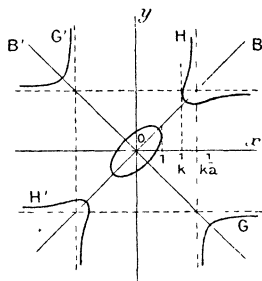
La courbe (5) se compose, comme on le verrait aisément :

1° D'un ovale inscrit dans le carré de côtés $x = \pm 1$, $y = \pm 1$;

2° De deux branches infinies HH' asymptotes aux

droites $y = \pm \frac{1}{ka}$, et disposées comme l'indique la *fig. 11*; elles ont une tangente verticale d'abscisse $\pm \frac{1}{k}$

Fig. 11.



et une tangente horizontale de même ordonnée;

3° De deux autres branches infinies GG' ayant les mêmes asymptotes, mais situées de l'autre côté de ces asymptotes.

Les bissectrices OB , OB' sont les axes de symétrie de la courbe.

19. Considérons plus particulièrement l'ovale central; la *fig. 1* pourra nous servir. Partons encore du point P_0 et décrivons le chemin $P_0 OP_1 M \dots$, en ayant toujours soin de ne prendre parmi les deux intersections d'une verticale à l'ovale, quand elles sont distinctes, que celle qui n'est pas symétrique du point précédemment obtenu. Je dis que l'on a

$$\text{ordonnée de } P_\mu = \text{sn}(\mu p).$$

En effet, P_1 correspond à $\text{sn} q = x = 0$; on a donc, d'après (5),

$$\text{ordonnée de } P_1 = a = \text{sn} p.$$

En remarquant que l'abscisse de P_2 est égale à l'or-

donnée de P_1 , puisque M_1 est sur la bissectrice OB , on aura l'ordonnée de P_2 en remplaçant dans (5) x par l'ordonnée de P_1 , c'est-à-dire par a , on a donc

$$\text{ordonnée de } P_2 = \frac{2a\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-k^2a^2}}{1-k^2a^4} = \text{sn}(2p);$$

on verra ensuite que la loi est générale, en la supposant vraie, pour le point P_μ et en passant au point $P_{\mu+1}$.

20. Par la méthode du n° 2 nous obtiendrons, au moyen de l'ovale central, une courbe Γ qui représentera la fonction $\text{sn } z$ et, comme au n° 4, nous vérifierons qu'elle satisfait au théorème d'addition et aux conditions $\text{sn}(0) = 0$, $\left(\frac{d\text{sn } z}{dz}\right)_{z=0} = 1$. Comme $\sin z$, $\text{sn } z$ a pour coefficient angulaire à l'origine l'unité, et oscille entre -1 et $+1$, sa courbe figurative a ainsi une forme analogue; mais la période est plus grande; quand k^2 tend vers 1, cette période devient de plus en plus grande; pour $k^2 = 1$ la fonction devient $\text{Th } z$.

21. *Équation différentielle.* — Deux points successifs $P_\mu, P_{\mu+1}$ de l'ovale et, par suite, deux points successifs $P'_\mu, P'_{\mu+1}$ de la courbe Γ ont pour ordonnées $\mathcal{Y}_\mu, \mathcal{Y}_{\mu+1}$. Comme l'abscisse du point $P_{\mu+1}$, d'ordonnée $\mathcal{Y}_{\mu+1}$, est précisément égale à $\mathcal{Y}_\mu$, on aura

$$\mathcal{Y}_{\mu+1} - \mathcal{Y}_\mu = \frac{a\sqrt{1-\mathcal{Y}_\mu^2}\sqrt{1-k^2\mathcal{Y}_\mu^2} + \mathcal{Y}_\mu\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-k^2a^2}}{1-k^2a^2\mathcal{Y}_\mu^2} - \mathcal{Y}_\mu.$$

En divisant cette différence par a on aura le coefficient angulaire de la sécante qui joint les deux points. En faisant tendre a vers 0 et en prenant la limite du rapport, il vient

$$\frac{d\mathcal{Y}}{dz} = \sqrt{1-\mathcal{Y}^2}\sqrt{1-k^2\mathcal{Y}^2}.$$

22. Les conclusions de la fin du n° 5 s'appuient sur ce fait que l'ellipse n'est rencontrée qu'en deux points par une parallèle à oxy , admet pour axes de symétrie les deux bissectrices, et est une courbe fermée et sans point double. L'ovale que nous considérons ayant les mêmes propriétés, les résultats de la fin du n° 5 s'appliquent à $\sin z$; disons seulement que la quantité analogue à π est notée d'ordinaire 2Ω et représente la demi-période.

23. *Période imaginaire.* — Pour voir si $\sin z$ admet une période imaginaire, nous considérerons la fonction conjuguée et nous chercherons si cette dernière admet une période réelle. En changeant a, x et y en $a\sqrt{-1}, x\sqrt{-1}, y\sqrt{-1}$, l'équation (5) devient

$$y\sqrt{-1} = \frac{a\sqrt{-1}\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+k^2x^2} + x\sqrt{-1}\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+k^2a^2}}{1-k^2a^2x^2}$$

ou bien

$$(6) \quad y = \frac{a\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+k^2x^2} + x\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+k^2a^2}}{1-k^2a^2x^2}.$$

Telle est la formule d'addition de la fonction conjuguée.

La courbe (6) se compose :

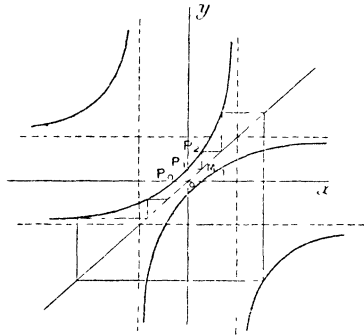
1° De deux branches HH' (*fig. 12*) ayant pour asymptotes les droites $x = \pm \frac{1}{ka}, y = \pm \frac{1}{ka}$;

2° De deux branches infinies GG' ayant les mêmes asymptotes et situées de l'autre côté de ces asymptotes. Ces quatre branches sont disposées comme l'indique la *fig. 12*. Les bissectrices de l'angle xoy sont axes de symétrie de la courbe.

En parcourant la ligne brisée $P_0OP_1M_1P_2\dots$ toujours en faisant attention de choisir, de deux intersec-

tions d'une verticale avec la courbe, celle qui n'est pas symétrique du point précédemment obtenu, on pourra représenter la fonction conjuguée; le même fait qu'au n° 14 se présente ici; il y a une valeur de z pour laquelle la fonction devient $\pm \infty$, après quoi on est ramené dans la région de la courbe d'où l'on était parti; *la fonction conjuguée est périodique*; sa courbe figurative

Fig. 12.

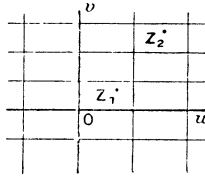


a une forme analogue à celle de $\text{tang } z$; mais la période est plus grande et d'autant plus que k^2 est plus voisin de 0; pour $k^2 = 0$ la période est infinie; la fonction se confond alors avec $\text{Sh } z$. La fonction conjuguée de $\text{sn } z$ ayant une période réelle $2\Omega_1$, $\text{sn } z$ admet la période imaginaire $2\Omega_1 \sqrt{-1}$.

24. *Rectangle des périodes.* — Comme $\text{sn } z$, $\text{sn } z$ admet une période réelle; le plan de z est partagé d'abord, comme sur la *fig. 5*, en bandes parallèles à l'axe imaginaire; comme $\text{Th } z$, $\text{sn } z$ admet une période imaginaire, le plan des z est aussi partagé comme sur la *fig. 10* en bandes parallèles à l'axe réel; ici donc le plan est partagé en rectangles (*fig. 13*), de côtés $2\Omega_1$ et $4\Omega_2$, et quand z prend des valeurs représentées par des

points tels que Z_1, Z_2 occupant dans deux rectangles quelconques des positions relatives semblables, $\text{sn } z$ prend la même valeur; $\text{sn } z$ est *doublement périodique*.

Fig. 13.



Dans chaque rectangle elle s'annule deux fois et devient infinie deux fois.

23. *Variations de sn z.* — Pour trouver, comme aux nos 10 et 17, le lieu des points représentatifs de $\text{sn } z$ quand z décrit dans un des rectangles de son plan une parallèle à l'axe ou , nous écrirons

$$\text{sn}(u + v_0 \sqrt{-1}) = \frac{\text{sn } u \sqrt{1 + \text{Sn}^2 v_0} \sqrt{1 + k^2 \text{Sn}^2 v_0} + \sqrt{-1} \text{Sn } v_0 \sqrt{1 - \text{sn}^2 u} \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 u}}{1 + k^2 \text{sn}^2 u \text{Sn}^2 v_0},$$

où nous avons représenté par Sn la fonction conjuguée de sn . Cette fonction n'a reçu aucun nom et n'aurait, du reste, que peu d'utilité; nous ne l'introduisons que momentanément pour mieux faire ressortir l'analogie avec le cas du sinus.

Posons $\text{sn } u = \xi$, $\text{sn}(u + v_0 \sqrt{-1}) = U + V \sqrt{-1}$, $\text{Sn } v_0 = V_0$; en séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on aura

$$U^2 = \frac{\xi^2(1 + V_0^2)(1 + k^2 V_0^2)}{(1 + k^2 \xi^2 V_0^2)^2},$$

$$V^2 = \frac{V_0^2(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}{(1 + k^2 \xi^2 V_0^2)^2}.$$

Éliminant ξ^2 entre ces deux équations on a, pour le lieu cherché,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} k^2 (U^2 + V^2)^2 - \frac{(1 + k^2)(1 + k^2 V_0^2) + 4k^2 V_0^2}{(1 + V_0^2)(1 + k^2 V_0^2)} U^2 \\ - \frac{1 + k^2 V_0^2}{V_0^2} V^2 + 1 = 0. \end{aligned} \right.$$

En opérant de même, dans le cas où z décrit une parallèle à l'axe ov , il est de la forme $u_0 + v\sqrt{-1}$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u_0 + v\sqrt{-1}) \\ = \frac{\operatorname{sn} u_0 \sqrt{1 + \operatorname{Sn}^2 v} \sqrt{1 + k^2 \operatorname{Sn}^2 v} + \sqrt{-1} \operatorname{Sn} v \sqrt{1 - \operatorname{Sn}^2 u_0} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_0}}{1 + k^2 \operatorname{sn}^2 u_0 \operatorname{Sn}^2 v}, \end{aligned}$$

posant $\operatorname{sn} u_0 = U_0$, $\operatorname{Sn} v = \xi$, on a les deux équations

$$U^2 = \frac{U_0^2 (1 + \xi^2) (1 + k^2 \xi^2)}{(1 + k^2 U_0^2 \xi^2)^2},$$

$$V^2 = \frac{\xi^2 (1 - U_0^2) (1 - k^2 U_0^2)}{(1 + k^2 U_0^2 \xi^2)^2}.$$

Éliminant ξ^2 on arrive à

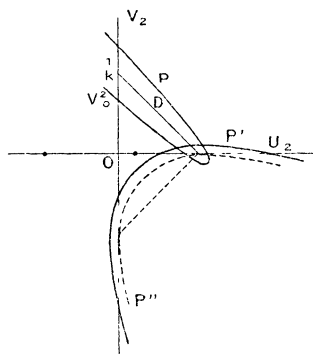
$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} k^2 (U^2 + V^2)^2 + \frac{(1 + k^2)(1 + k^2 U_0^2) - 4k^2 U_0^2}{(1 - U_0^2)(1 - k^2 U_0^2)} V^2 \\ - \frac{1 + k^2 U_0^2}{U_0^2} U^2 + 1 = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour nous rendre compte de l'allure générale des courbes des formules (7) et (8), considérons U^2 et V^2 comme étant les coordonnées (*fig. 14*). Les courbes (7) sont alors des paraboles telles que P dont l'axe a pour coefficient angulaire -1 ; elles coupent l'axe OV^2 aux points V_0^2 et $\frac{1}{k^2 V_0^2}$; et l'axe OU^2 aux points $\frac{1 + V_0^2}{1 + k^2 V_0^2}$ et $\frac{1}{k^2} \frac{1 + k^2 V_0^2}{1 + V_0^2}$. Elles n'ont aucun point commun dans le premier quadrant.

Pour $V_0^2 = \frac{1}{k}$ on a la droite double D qui coupe les axes en $U^2 = \frac{1}{k}$, $V^2 = \frac{1}{k}$.

Les courbes (8) sont aussi des paraboles telles que P', leurs axes ont la même direction que ceux des paraboles P; mais elles sont dirigées en sens contraire; elles coupent l'axe OU^2 aux points U_0^2 et $\frac{1}{k^2 U_0^2}$ et l'axe OV^2 aux points $-\frac{1-U_0^2}{1-k^2 U_0^2}$ et $-\frac{1-k^2 U_0^2}{1-U_0^2}$; pour $U_0^2 = \frac{1}{k}$

Fig. 14.



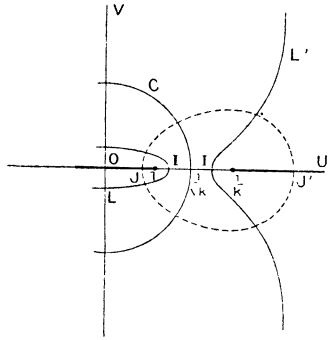
et $V_0^2 = -\frac{1}{k}$, on a la parabole P'' tangente aux axes en ces points. Les paraboles P' n'ont aucun point commun.

Quant aux courbes (7) et (8), on les obtiendra en faisant correspondre à chaque point U^2, V^2 du premier quadrant (puisque U^2 et V^2 doivent être positifs pour que U et V soient réels) quatre points $(+U, +V)$, $(+U, -V)$, $(-U, +V)$, $(-U, -V)$.

Les courbes obtenues sont donc symétriques (fig. 15) par rapport aux axes OU, OV. Parmi les courbes (7) (en trait plein) se trouve le cercle double C de rayon $\frac{1}{\sqrt{k}}$

qui correspond à la droite D de la *fig.* 14. Toutes les courbes sont fermées sauf la courbe limite qui se confond avec l'axe OU; elles coupent l'axe OU en deux points I, I' compris entre les points d'abscisses 1 et $\frac{1}{k}$; et en deux points symétriques par rapport à OV; elles

Fig. 15.



coupent OV en quatre points symétriques deux à deux par rapport à OU; deux de ces points s'éloignent à $\pm \infty$, tandis que les deux autres tendent vers o.

Les courbes (8) figurées en points admettent aussi OU et OV pour axes de symétrie, elles ne coupent jamais OV; à la limite elles se confondent avec cette droite; elles coupent la partie positive, par exemple, de OU en deux points J et J', l'un J entre o et 1, l'autre J' entre $\frac{1}{k}$ et ∞ ⁽¹⁾.

(¹) Si dans l'équation (8) on fait $U_0^2 = \frac{1 \pm k'}{k^2}$ avec $k^2 + k'^2 = 1$, on a une courbe telle que le produit des distances de chacun de ses points aux deux points fixes $U = \pm \frac{1}{k}$, $V = 0$ est constant et égal à $\frac{k'}{k^2}$.

On pourrait démontrer que les systèmes (7) et (8) sont orthogonaux.

Les courbes (7) n'ont aucun point commun, il en est de même des courbes (8). Les unes et les autres sont des courbes fermées. Comme dans le cas des ellipses relatives à $\sin z$ (n° 11) on verra qu'il ne peut exister de position limite ni sur les courbes (7), ni sur les courbes (8), $\operatorname{sn} z$ et sa conjuguée $\operatorname{Sn} z$ ont donc chacune une période réelle; $\operatorname{sn} z$ a donc une période réelle et une période imaginaire.

26. *Dégénérescences de sn.* — Quand on fait $K^2 = 0$, $\operatorname{sn} z$ dégénère en $\sin z$.

Le théorème d'addition (5), n° 18, se réduit à (1) (n° 1).

L'équation différentielle du n° 21 se réduit à celle du n° 5. Les parties des courbes (7) intérieures à C (fig. 15) se transforment en ellipses homofocales de foyers ± 1 , le cercle C s'éloigne à l'infini et les portions des courbes (8) intérieures au cercle C deviennent les hyperboles du n° 10 homofocales et orthogonales aux ellipses.

Quand on fait $k^2 = 1$, $\operatorname{sn} z$ dégénère en $\operatorname{Th} z$.

Le théorème d'addition (5) se réduit à

$$y = \frac{\alpha(1-x^2) + x(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2 x^2} = \frac{\alpha+x}{1+\alpha x},$$

c'est l'équation du n° 13.

L'équation différentielle du n° 21 se réduit à celle du n° 13.

Les courbes (7) (fig. 15) se transforment de la façon suivante :

Les points de OU d'abscisses 1 , $\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\frac{1}{k}$ se confondent;

les parties telles que LI et I'L' des courbes (7) se réunissent en un même point d'abscisses ± 1 et reproduisent les cercles $C_1, C_2, \dots$ de la *fig. 10*; les courbes (8) deviennent des cercles tels que D de la *fig. 10*.

27. *Les fonctions complémentaires.* — On appliquera facilement cette représentation géométrique aux fonctions $\text{cn } z$, $\text{dn } z$ définis par les relations

$$\text{cn } z = \sqrt{1 - \text{sn}^2 z}, \quad \text{dn } z = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2 z},$$

et dont on formera d'abord le théorème d'addition.

Dans les *Nouvelles Annales* (août 1898) M. Iaggi a proposé d'adjoindre à la fonction $\text{sn } z$ une fonction qu'il appelle *cosinus elliptique* et qu'il note $\cos_e z$, définie par la relation

$$\cos_e z = \frac{\text{cn } z}{\text{dn } z},$$

ou bien, par suite,

$$\cos_e z = \sqrt{\frac{1 - \text{sn}^2 z}{1 - k^2 \text{sn}^2 z}}.$$

La représentation géométrique que nous avons exposée permet de donner de la fonction de M. Iaggi une interprétation simple.

Reprenons d'abord la formule (1) et faisons $a = 1$, il vient

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

L'ellipse de la *fig. 1* devient un cercle de rayon 1; et si l'ordonnée y d'un point de ce cercle est considérée comme étant $\text{sn } z$, l'abscisse x est $\cos_e z$ puisque l'on a par définition

$$\cos_e z = \sqrt{1 - \text{sn}^2 z}.$$

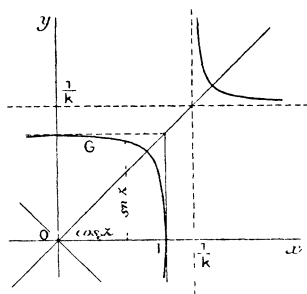
Reprenons de même l'équation (5) en y faisant $a = 1$,

elle devient

$$y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}.$$

La courbe de la *fig. 11*, tout en restant symétrique par rapport aux bissectrices des axes, devient symétrique par rapport aux axes eux-mêmes (*fig. 16*); de la rela-

Fig. 16.



tion ci-dessus on tire, en effet, $x = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-k^2y^2}}$; on peut donc permuter x et y .

On remarque que les points de croisement des asymptotes qui se trouvaient dans la concavité des branches infinies (*fig. 11*) sont ici en dehors de ces régions; cela vient de ce que les asymptotes sont ici les limites des tangentes horizontales et verticales aux branches infinies de la *fig. 11*. Plus k^2 est voisin de 0, plus la courbe centrale se rapproche du cercle de rayon 1 et plus les branches infinies s'éloignent. Plus k^2 est voisin de 1, plus l'ensemble des courbes se rapproche des quatre droites $x = \pm 1, y = \pm 1$.

D'après ce qu'on vient de voir, si l'on considère $\sin z$ comme représentant l'ordonnée d'un point de la courbe, son abscisse n'est autre que la fonction $\cos_e z$ de M. Iaggi. On a ainsi plus d'analogie avec le cercle.

On appelle *intégrales de première espèce* et de *seconde espèce* les intégrales

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}}, \quad \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}}.$$

L'intégrale de seconde espèce peut se ramener à celle de première espèce et à celle qui représente l'aire comprise entre la courbe G , les axes et une parallèle à l'axe oy ; en effet, si l'on appelle g cette surface, on a

$$g = \int_0^x \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2 x^2}} dx,$$

ou, en multipliant les deux termes par $\sqrt{1-x^2}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}} dx \\ &= \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}} - \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}}; \end{aligned}$$

par suite :

Intégrale de seconde espèce = Intégrale de première espèce — g .

28. *La fonction p.* — On exprime d'ordinaire $p(p+q)$ en fonction de $p(p)$, $p(q)$, $p'(p)$ et $p'(q)$; au moyen des relations entre $p'(p)$ et $p(p)$, $p'(q)$ et $p(q)$, on exprimera $p(p+q)$ en fonction symétrique de $p(p)$ et de $p(q)$. On pourra ensuite appliquer à la fonction p les méthodes précédentes; nous engageons le lecteur à le faire. Ici nous nous bornerons à chercher les courbes analogues à (7) et (8). La fonction p est, comme l'on sait, définie par trois constantes e_1 , e_2 , e_3 ; dans le cas particulier où l'on fait

$$e_3 - e_1 = 1, \quad e_2 - e_1 = k^2,$$

on a la relation

$$(9) \quad p(z) + \frac{1+k^2}{3} = \frac{1}{\operatorname{sn}^2(z)}.$$

On peut de là, sans écrire le théorème d'addition de p , trouver pour cette fonction des courbes analogues aux courbes (7) et (8) relatives à sn .

En effet, dans les équations (7) et (8) passons en coordonnées polaires, en posant

$$\operatorname{sn}(z) = R e^{\Omega \sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire

$$U = R \cos \Omega, \quad V = R \sin \Omega.$$

L'équation (7) prendra la forme

$$R^4 + AR^2 \cos^2 \Omega + BR^2 \sin^2 \Omega + C = 0,$$

A, B, C étant trois constantes dont une seule est arbitraire.

Il en sera de même pour l'équation (8). Si maintenant l'on pose

$$p(z) + \frac{1+k^2}{3} = \rho e^{\omega \sqrt{-1}},$$

l'équation (9) équivaudra aux deux suivantes

$$\rho = \frac{1}{R^2}, \quad \omega = -2\Omega.$$

Par suite, au moyen de la transformation $\rho = \frac{1}{R^2}$, $\omega = -2\Omega$, on pourra à chaque point des courbes (7) et (8) faire correspondre un point des courbes analogues relatives à $p + \frac{1+k^2}{3}$. Ces courbes n'admettent que l'axe réel pour axe de symétrie (*fig. 17*).

Les courbes qui représentent les variations de $p(z) + \frac{1+k^2}{3}$ quand z décrit dans son plan une parallèle à ou , et varie par suite de quantités réelles, n'ont

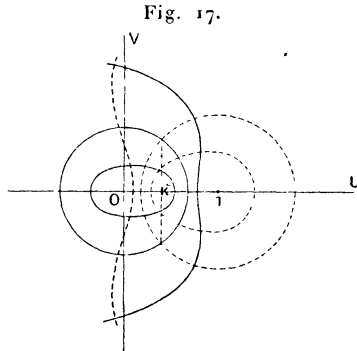
entre elles aucun point commun. Il en est de même pour les autres qui correspondent aux cas où z varie de quantités purement imaginaires. De plus, les deux systèmes de courbes sont constitués par des courbes fermées (sauf les courbes limites).

Les deux systèmes sont orthogonaux, car les courbes (7) et (8) sont orthogonales et la *transformation*

$$\rho = \frac{1}{R^2}, \quad \omega = -2\Omega,$$

n'altère pas les angles.

Parmi ces courbes se trouvent le cercle de rayon k



ayant l'origine pour centre et le cercle de rayon k' ayant pour centre le point $V = 0, U = 1$.

On sait que p jouit de propriétés plus simples que sn . En ce qui concerne les courbes invariantes que nous venons de considérer, un fait analogue se produit. Il y a entre les deux systèmes de courbes une symétrie particulière qui devient la symétrie ordinaire quand $k^2 = k'^2 = \frac{1}{2}$. L'axe de symétrie est alors la parallèle à OV à la distance $\frac{1}{2}$.
