

P. SONDAT

Théorème sur les équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 25-28

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__25_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A3a]

THÉORÈME SUR LES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES;

PAR M. P. SONDAT.

Si l'équation

$$(1) \quad \varphi(x) = ax^n - nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} cx^{n-2} - \dots + nkx - l = 0$$

de degré impair, a $\frac{n+1}{2}$ racines égales, on a, pour cette racine multiple,

$$\rho = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

Δ , Δ_1 et Δ_2 étant des fonctions homogènes et du second degré des coefficients $a, b, c, \dots, h, k, l$.

Appelons $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{n-1}, a$, les dérivées successives de φ , divisées respectivement par $n, n(n-1), n(n-1)(n-2), \dots$, et soit

$$\psi(x) = bx^{n-1} - (n-1)cx^{n-2} + \dots - (n-1)kx + l.$$

Dans φ_1 et ψ , remplaçons les puissances décroissantes

de x par $k, h, \dots, c, b, a$ et ensuite par $l, k, h, \dots, c, b$, ou posons

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta = ak - (n-1)bh + \dots - (n-1)hb + ka, \\ \Delta_1 = al - (n-1)bk + \dots - (n-1)hc + kb, \\ \Delta_2 = bl - (n-1)ck + \dots - (n-1)kc + lb. \end{cases}$$

Dans ces fonctions homogènes, remplaçons

$$a, b, c, \dots, h, k, l$$

par

$$a, \varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \dots, \varphi_2, \varphi_1, \varphi,$$

et appelons $\Delta', \Delta'_1, \Delta'_2$ les résultats des substitutions. Nous aurons

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta' = a\varphi_1 - (n-1)\varphi_2\varphi_{n-1} + \dots - (n-1)\varphi_3\varphi_{n-1} + a\varphi_1, \\ \Delta'_1 = a\varphi - (n-1)\varphi_1\varphi_{n-1} + \dots - (n-1)\varphi_2\varphi_{n-2} + \varphi_1\varphi_{n-1}, \\ \Delta'_2 = \varphi\varphi_{n-1} - (n-1)\varphi_1\varphi_{n-2} + \dots - (n-1)\varphi_1\varphi_{n-2} + \varphi_1\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

Or $\frac{d\Delta'}{dx} = 0$, donc Δ' est indépendant de x .

De plus

$$(4) \quad \Delta' = \Delta,$$

car en faisant $x = 0$, on rend les termes de Δ' égaux à ceux de Δ (1).

On trouve aussi

$$\frac{d\Delta'_1}{dx} = \Delta,$$

d'où

$$\Delta'_1 = \Delta x + c,$$

et, en faisant $x = 0$, — $\Delta_1 = c$. Donc

$$(5) \quad \Delta'_1 = \Delta x - \Delta_1.$$

(1) Voir un théorème analogue, *N. A.*, p. 169; 1897.

En procédant de même, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta'_2}{dx} &= 2\Delta'_1 = 2\Delta x - 2\Delta_1, \\ (6) \quad \Delta'_2 &= \Delta x^2 - 2\Delta_1 x + \Delta_2. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'équation (1) a $\frac{n+1}{2}$ racines égales, en attribuant à x la valeur, soit ρ , de cette racine multiple, annulant φ , φ_1 , $\dots$, $\varphi_{\frac{n-1}{2}}$ et, par suite, Δ'_1 et Δ'_2 , on aura, pour la déterminer, les deux équations

$$(7) \quad \begin{cases} \Delta\rho - \Delta_1 = 0, \\ \Delta\rho^2 - 2\Delta_1\rho + \Delta_2 = 0, \end{cases}$$

d'où

$$(8) \quad \rho = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1},$$

et, par suite,

$$\Delta_1^2 - \Delta\Delta_2 = 0,$$

pour l'une des conditions de multiplicité.

Remarques. — I. Si ρ était une racine multiple de l'ordre $\frac{n+3}{2}$, annulant Δ' , Δ'_1 , Δ'_2 , les équations (7), devenant identiques, la laisseraient indéterminée, mais l'équation $\varphi_2 = 0$, traitée de la même manière, la ferait connaître, et l'on aurait alors les trois conditions simples de multiplicité

$$\Delta = 0, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0.$$

II. Avec $n = 2\nu$ pair, si l'équation (1) avait $\nu + 1$ racines égales, chacune des équations $\varphi_1 = 0$, $\psi = 0$, de degré impair, en aurait ν , car

$$\varphi = x\varphi_1 - \psi,$$

et le théorème leur serait applicable.

Donc, quand une équation algébrique, de degré quelconque, a plus de la moitié de ses racines égales, la racine multiple doit affecter la forme (8).

Applications. — I. Si $n = 3$, on a, pour une racine double,

$$(9) \quad \rho = \frac{bc - ad}{2(b^2 - ac)} = \frac{2(c^2 - hd)}{bc - ad}.$$

II. Si $n = 5$, on a, pour une racine triple,

$$(10) \quad \rho = \frac{2cd - 3be + af}{2(3c^2 - 4bd + ae)} = \frac{2(3d^2 - 4ce + bf)}{2cd - 3be + af},$$

et les trois trinomes seraient nuls avec une racine *quadruple*, donnée par (9).

III. Si $n = 6$, une racine *quintuple* est donnée par (9), une racine *quadruple* par (10) et entraîne alors la condition

$$10d^2 - 15ce + 6bf - ag = 0.$$