

H. BILENKI

Note sur les permutants

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 213-216

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__213_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[B1a]

NOTE SUR LES PERMUTANTS;

PAR M. H. BILENKI.

Considérons un Tableau rectangulaire de q lignes et de p colonnes et représentons, suivant l'usage, par la notation a_{α}^{β} l'élément écrit dans la ligne de rang α et dans la colonne de rang β

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{p-1} & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^{p-1} & a_2^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q-1}^1 & a_{q-1}^2 & \dots & a_{q-1}^{p-1} & a_{q-1}^p \\ a_q^1 & a_q^2 & \dots & a_q^{p-1} & a_q^p \end{vmatrix}.$$

Développons ce Tableau conformément aux règles suivantes :

1° Chaque terme $a_{x_1}^{\beta_1}, a_{x_2}^{\beta_2}, \dots, a_{x_p}^{\beta_p}$ du développe-

ment contient $p + q - 1$ éléments du Tableau, chaque élément n'entrant, bien entendu, qu'une fois dans chaque terme.

2° La somme $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_{p+q-1}$ des indices supérieurs peut prendre les $p + q - 1$ valeurs suivantes

$$\begin{aligned} q - 1 + \frac{p(p+1)}{2}, \\ q - 1 + \frac{p(p+1)}{2} + 1, \\ \dots\dots\dots, \\ q - 1 + \frac{p(p+1)}{2} + p + q - 2. \end{aligned}$$

3° La somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{p+q-1}$ des indices inférieurs prend alors les $p + q - 1$ valeurs correspondantes

$$\begin{aligned} p - 1 + \frac{q(q+1)}{2}, \\ p - 1 + \frac{q(q+1)}{2} + 1, \\ \dots\dots\dots, \\ p - 1 + \frac{q(q+1)}{2} + p + q - 2; \end{aligned}$$

de sorte que l'excès de la première somme sur la seconde est constant et égal à

$$\frac{p(p-1)}{2} - \frac{q(q-1)}{2}.$$

Il est facile de s'assurer que ce développement, auquel je donnerai le nom de *permutant*, contient un nombre de termes égal à

$$\frac{p(p+1) \dots (p+q-2)}{(q-1)!}.$$

Cela posé, considérons le permutant

$$\left| \begin{array}{ccccc} \frac{N+qr}{1} & \frac{1}{N+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{N+r} & \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N-1+qr} & \frac{1}{N-1+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{N-1+r} & \frac{1}{N-1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ \frac{1}{p+1+qr} & \frac{1}{p+1+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{p+1+r} & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{p+qr} & \frac{1}{p+(q-1)r} & \cdots & \frac{1}{p+r} & \frac{1}{p} \end{array} \right|$$

dans lequel p et r sont quelconques, mais où q est un entier positif; la différence $N - p$ est, en outre, entière et positive : c'est une fonction de r que je représenterai par le symbole $\overset{N}{\underset{p}{\Phi}}_q(r)$.

J'ai trouvé la formule suivante

$$\begin{aligned} & (-1)^{N-p} \frac{1}{(N-p)!} \frac{1}{N+qr} \frac{1}{N+(q-1)r} \cdots \frac{1}{N+r} \frac{1}{N} \\ &= \overset{N}{\underset{p}{\Phi}}_q(r) - \frac{1}{1} \frac{N-1}{\underset{p}{\Phi}}_q(r) + \frac{1}{2!} \frac{N-2}{\underset{p}{\Phi}}_q(r) + \dots \\ &+ (-1)^{N-p} \frac{1}{(N-p)!} \overset{p}{\underset{p}{\Phi}}_q(r). \end{aligned}$$

On peut en déduire une foule d'autres en faisant certaines hypothèses sur les nombres p, q, r .

Dans le cas très particulier où le permutant considéré n'a que deux lignes, c'est-à-dire quand $N = p + 1$, on obtient l'identité suivante, aisée, d'ailleurs, à démontrer directement :

$$\begin{aligned} & \frac{p+1+qr}{p+qr} \frac{p+1+(q-1)r}{p+(q-1)r} \cdots \frac{p+1+r}{p+r} \frac{p+1}{p} \\ &= \frac{1}{p+qr} + \frac{p+1+qr}{p+qr} \frac{1}{p+(q-1)r} \\ &+ \frac{p+1+qr}{p+qr} \frac{p+1+(q-1)r}{p+(q-1)r} \frac{1}{p+(q-2)r} + \dots \\ &+ \frac{p+1+qr}{p+qr} \frac{p+1+(q-1)r}{p+(q-1)r} \cdots \frac{p+1+r}{p+r} \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Si $r = 0$, on a la formule suivante que j'ai déjà donnée (*Intermédiaire des Mathématiciens*, juin 1899, p. 127) :

$$\begin{aligned} & (-1)^{N-p} \frac{N(N-1)(N-2)\dots(p+1)p}{(N-p)! N^{p+1}} \\ &= \sum_p^N n - \frac{N}{1} \sum_p^{N-1} n + \frac{N(N-1)}{2!} \sum_p^{N-2} n - \dots \\ &+ (-1)^{N-p} \frac{N(N-1)\dots(p+1)}{(N-p)!} \sum_p^p n, \end{aligned}$$

et dans laquelle le symbole $\sum_p^N n$ représente une fonction homogène complète, du degré n , dont tous les coefficients sont égaux à l'unité, de la suite des nombres

$$\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p+1}, \quad \dots, \quad \frac{1}{N},$$

formule qui est elle-même assez générale et qui contient, entre autres, celle des progressions géométriques.

Enfin, si $r = 1$, on obtient plusieurs formules d'analyse combinatoire.

La fonction $\Phi_p^N(r)$ jouit encore de nombreuses propriétés; j'ignore si on les a étudiées.