NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARLES MICHEL

Remarques sur quelques théorèmes généraux de géométrie métrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 169-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__169_1>

[M[1]3]

REMARQUES SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE;

PAR M. CHARLES MICHEL,
Agrége de l'Université

1. Je me propose de montrer quels rapprochements peuvent être établis entre plusieurs théorèmes généraux, de nature différente, énoncés par Chasles, Liouville et Laguerre, complétés et généralisés par M. Georges Humbert, dans un important Mémoire sur les applica-

tions géométriques du théorème d'Abel (*Journal de Mathématiques*, 1887).

Soient, sur une droite fixe, trois points fixes A, B, C et un système de n points P_1, P_2, ..., P_n, variant avec la condition que le produit des n rapports anharmoniques (P_iCAB) soit constant. Si nous désignons par a, b, c les paramètres des points A, B, C sur la droite donnée et par t_i le paramètre du point P_i, le rapport anharmonique (P_iCAB) est égal à

$$\frac{t_i - a}{t_i - b} : \frac{c - a}{c - b},$$

et l'on voit que la condition donnée revient à celle-ci :

$$\prod_{i=1}^{i=n} \frac{t_i - a}{t_i - b} = \mathrm{U},$$

U étant une quantité constante.

Que devient cette condition, si l'on suppose que le point B tende à se confondre avec le point A? Pour le voir, posons $b = a + h$. La relation précédente s'écrit alors

$$\prod_{i=1}^{i=n} \left(1 + \frac{h}{t_i - b}\right) = \mathrm{U},$$

ou, si l'on développe le premier membre suivant les puissances successives de h,

$$1 + h \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{t_i - b} + \dots = \mathrm{U},$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{t_i - b} \dots = \frac{\mathrm{U} - 1}{h}.$$

Faisons tendre h vers 0 et passons à la limite. Si L désigne la valeur de $\frac{U-1}{h}$, la relation devient

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{t_i - b} = L,$$

et elle exprime que le pôle harmonique du système des n points variables par rapport au point A est un point fixe.

La dégénérescence de la première condition géométrique en la seconde était connue de Poncelet, qui s'en est servi, dans son *Analyse des Transversales*, pour déduire du théorème de Carnot, sur les transversales, le théorème de Côtes, sur la polaire harmonique d'un point par rapport à une courbe algébrique. C'est dans le même ordre d'idées que nous allons déduire d'une série de théorèmes énoncée par Laguerre et complétée par M. Humbert une autre série énoncée par Liouville et complétée aussi par M. Humbert, dans le Mémoire déjà cité.

2. Laguerre a énoncé le théorème suivant :

(1) *L'orientation du système des tangentes communes à deux courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une courbe qui lui est homofocale* (*Bulletin de la Société philomathique*, 1870).

De ce théorème on déduit le cas particulier suivant, énoncé aussi par Laguerre :

(2) *L'orientation du système des tangentes menées d'un point à une courbe algébrique est égale à l'orientation du système des droites qui joignent ce point aux foyers réels de la courbe* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1865).

D'autre part, on doit à M. Humbert un théorème sur les faisceaux tangentiels de courbes algébriques :

(3) *Les orientations des systèmes des tangentes menées à deux courbes de classe n par un foyer d'une courbe du faisceau tangentiel qui contient ces deux courbes sont égales* (*Journal de Mathématiques*, 1887 : *American Journal of Mathematics,* 1888).

Voici un quatrième énoncé, qui n'est d'ailleurs qu'une combinaison des précédents :

(4) *L'orientation du système des tangentes communes à une courbe fixe et à une courbe variable d'un faisceau tangentiel reste constante, si chaque foyer réel de la courbe fixe est foyer d'une courbe du faisceau tangentiel.*

En effet, soient $F_1, F_2, \ldots, F_k$ les foyers réels de la courbe fixe (Γ). D'après le théorème de Laguerre, l'orientation du système des tangentes communes à la courbe (Γ) et à une courbe (C) du faisceau tangentiel est égale à l'orientation du système des tangentes menées des points $F_1, F_2, \ldots, F_k$ à la courbe (C). Mais, puisque chacun de ces points est foyer d'une courbe du faisceau tangentiel, d'après le théorème de M. Humbert, l'orientation du système des tangentes menées de l'un d'eux à la courbe (C) reste la même quand la courbe (C) varie dans le faisceau. L'orientation du système des tangentes menées de tous les points F à la courbe est donc elle-même constante, et le théorème est établi.

En particulier, on peut supposer que les foyers réels de la courbe fixe sont foyers d'une *même* courbe du faisceau tangentiel, et on a alors le théorème suivant, dû à M. Humbert :

(5) *Les deux systèmes de tangentes respectivement*

communes à deux courbes algébriques de même classe et à une courbe algébrique quelconque ont même orientation, si, parmi les courbes du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières, il en est une qui admette pour foyers tous les foyers de la dernière (*Journal de Mathématiques*, 1887).

Le théorème (4) comprend les théorèmes (1), (2), (3) et (5) comme cas particuliers. En effet, le théorème (5) est un cas particulier du théorème (4); mais, si, dans le théorème (5), on prend comme faisceau tangentiel un faisceau qui contient deux courbes homofocales, toutes les courbes du faisceau sont homofocales. L'une d'elles se décompose en une courbe de classe $n-2$, et en deux points qui sont les points cycliques du plan. Un point quelconque du plan peut être considéré comme un foyer de ce système de deux points (Humbert, *American Journal*, 1888), et ainsi les foyers d'une courbe quelconque peuvent être considérés comme des foyers d'une courbe du faisceau. On obtient alors le théorème de Laguerre, dont le théorème (2) est un cas particulier. Enfin, il est clair que le théorème (3) est une forme particulière du théorème (4).

3. Nous avons ainsi une série de théorèmes dans lesquels un système de droites varie en conservant une orientation constante. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les points où les n droites de ce système variable rencontrent la droite de l'infini, A et B les points cycliques, et C le point à l'infini de la droite fixe, quelconque d'ailleurs, qui sert d'origine des angles. D'après la formule de Laguerre, qui permet d'exprimer l'angle de deux droites par le rapport anharmonique de ces deux droites avec les droites isotropes de leur point de rencontre, on voit

que le produit des n rapports anharmoniques (P_iCAB) a une valeur constante.

Sous cette forme projective, on peut supposer que les points A et B sont, non plus les points cycliques, mais deux points quelconques du plan. Supposons alors que le point B, jusqu'à présent distinct du point A, vienne se confondre avec le point A sur la droite qui les joint. D'après le principe que j'ai établi au début, on voit que le système des points variables $P_1, P_2, \ldots, P_n$ varie de façon que son pôle harmonique par rapport au point A soit un point fixe. Mais, les deux points A et B étant confondus, la droite qui les joint devient une droite arbitraire passant par le point A. On voit ainsi que le système des droites variables devient un système de droites variant de façon que sa polaire harmonique par rapport au point A soit une droite fixe.

Dans cette dégénérescence, les tangentes communes à deux courbes restent les tangentes communes à deux courbes; mais les n foyers réels d'une courbe de classe n doivent être remplacés par les points de contact des n tangentes menées du point A à la courbe. Transformons maintenant par polaires réciproques de façon que le point A devienne la droite de l'infini. Les points de contact des tangentes menées à une courbe du point A se changent en les asymptotes de la courbe transformée. Si nous remarquons que le pôle harmonique d'un système de points par rapport à la droite de l'infini n'est autre que le centre des moyennes distances de ces points, nous voyons apparaître, comme dégénérescence d'un théorème où un système de droites variables a une orientation constante, un autre théorème où un système de points variables a un centre des moyennes distances fixe.

Les cinq théorèmes que nous avons énoncés nous donnent ainsi cinq autres théorèmes que l'on n'a pas encore pensé à rapprocher des premiers.

(1′) *Le centre des moyennes distances des points de rencontre de deux courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une autre qui a les mêmes asymptotes.* (Liouville, *Journal de Mathématiques*, 1841.)

(2′) *Le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une droite et d'une courbe algébrique coïncide avec le centre des moyennes distances des points de rencontre de cette droite avec les asymptotes de la courbe.*

(3′) *Les centres des moyennes distances des deux systèmes de points de rencontre de deux courbes algébriques par une asymptote d'une courbe du faisceau ponctuel qui contient les deux courbes coïncident.* (Humbert, *Journal de Mathématiques*, 1887.)

(4′) *Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe fixe et à une courbe variable d'un faisceau ponctuel reste fixe, si chaque asymptote de la courbe est asymptote à une courbe de faisceau.* (Humbert, *Journal de Mathématiques*, 1887.)

(5′) *Le centre des moyennes distances des points communs à une courbe fixe et à une courbe variable d'un faisceau ponctuel reste fixe, si, parmi les courbes du faisceau, il en est une qui admette pour asymptotes toutes les asymptotes de la première courbe.* (Humbert, *loc. cit.*)

Le théorème (4′) peut se déduire des théorèmes (1′) et (3′), comme le théorème (4) peut se déduire des théorèmes (1) et (3). On peut aussi regarder les théorèmes (1′), (2′), (3′) et (5′), comme des cas particuliers du théorème (4′).

4. Je signalerai, pour terminer, une correspondance analogue entre le théorème (2), que nous avons énoncé, et le théorème suivant, dû à Chasles :

Le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à une même direction, menées à une courbe algébrique, reste fixe quand cette direction varie.

J'ai rappelé, en effet, sans y insister, que Poncelet avait déduit le théorème de Côtes sur la polaire harmonique d'un point par rapport à une courbe algébrique comme une forme dégénérée du théorème de Carnot, sur les transversales, dans le cas où le polygone transversal se réduit à un triangle. Or, si l'on transforme par polaires réciproques le théorème de Côtes, de façon que le point se change en la droite de l'infini, on obtient justement l'énoncé du théorème de Chasles, et si l'on transforme le théorème de Carnot par polaires réciproques, de façon que deux des côtés du triangle transversal deviennent les points cycliques du plan, on obtient l'énoncé du théorème (2) de Laguerre. Le théorème de Chasles est donc une forme dégénérée du théorème de Laguerre, comme le théorème (2′) est une dégénérescence du théorème corrélatif du théorème de Laguerre.