

GEMINIANO PIRONDINI

Symétrie orthogonale par rapport à un cylindre quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19
(1900), p. 107-126

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__107_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[O4a]

**SYMÉTRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UN CYLINDRE
QUELCONQUE;**

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI, à Parme.

§ I.

Deux points A, A_1 sont *symétriques* par rapport à un cylindre K (*cylindre ichnographique*) quand la droite AA_1 est normale à la surface de K et qu'en outre elle est partagée en deux parties égales par cette surface.

Deux figures F, F_1 sont *symétriques*, quand une d'elles est le lieu des symétriques des points de l'autre.

A une figure F peuvent correspondre une ou plusieurs

figures réelles ou imaginaires F_1 . Cela tient à ce qu'un point A a autant de symétriques A_1 que le cylindre K a de normales passant par A .

Si la figure donnée est une ligne L , le lieu des pieds des normales au cylindre K , menées des points de L , est une autre ligne Λ qu'on appelle la *projection orthogonale de L sur le cylindre*.

PROBLÈME. — *On donne le cylindre ichnographique K et la figure primitive F ; déterminer la figure symétrique F_1 .*

Si $A(x, y, z)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_0(\xi, \eta, \zeta)$ sont trois points correspondants de F , F_1 , K , la condition que la droite AA_1 soit normale à K est exprimée par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} (x - \xi)\xi' + (y - \eta)\eta' = 0, \\ z = \zeta. \end{cases}$$

D'ailleurs, puisque

$$(2) \quad \xi = \frac{x + x_1}{2}, \quad \eta = \frac{y + y_1}{2}, \quad \zeta = z = z_1,$$

on a

$$(3) \quad x_1 = 2\xi - x, \quad y_1 = 2\eta - y, \quad z_1 = \zeta = z.$$

Puisqu'on peut regarder ξ, η comme des fonctions d'un paramètre τ , et x, y, z comme des fonctions d'un paramètre t , ou de deux paramètres indépendants u, v , suivant que la figure F est une ligne ou une surface, on voit que la figure symétrique F_1 est, dans tous les cas, définie par les équations (3), pourvu qu'on y élimine un des deux paramètres t, τ , ou bien un des trois paramètres u, v, τ au moyen de la première équation (1).

La projection orthogonale d'une ligne L sur le cy-

lindre K est représentée par les équations qu'on dérive des relations (2), en y éliminant l'un des paramètres t, τ , comme on vient de dire.

La figure F est une ligne L. — Soient

$$\tau = \varphi(\xi), \quad y = f(x)$$

les équations cartésiennes de la section droite du cylindre K et de la projection de la ligne objective L sur le plan $z = 0$.

En ayant recours aux égalités (3), (1), on trouve que la ligne symétrique L_1 est définie par les équations

$$x_1 = 2\xi - x, \quad y_1 = \varphi(\xi) + \frac{x - \xi}{\varphi'(\xi)}, \quad z_1 = z,$$

quand on emploie la relation

$$x + f(x) \varphi'(\xi) = \xi + \varphi(\xi) \varphi'(\xi),$$

pour y éliminer x ou ξ .

On peut effectuer l'élimination quand L est sur un plan parallèle à l'axe des z .

En supposant, en effet, $x = k$ (ce qu'on peut faire sans nuire à la généralité), la ligne symétrique L_1 est placée sur le cylindre dont la section droite est la courbe

$$y_1 = \varphi\left(\frac{x_1 + k}{2}\right) + \frac{k - x_1}{2\varphi'\left(\frac{x_1 + k}{2}\right)}.$$

Remarque. — Les calculs précédents restent les mêmes si, au lieu d'une ligne gauche L, on a un cylindre C dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z . La figure symétrique est, dans ce cas, un autre cylindre C_1 ayant même direction que C.

La figure F est une surface S. — Soit

$$z = F(x, y)$$

l'équation cartésienne de S.

Comme l'équation (1) donne dans ce cas

$$y = \varphi(\xi) - \frac{x - \xi}{\varphi'(\xi)},$$

en se rappelant les égalités (3), on trouve que la surface symétrique S_1 est représentée par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = 2\xi - x, & y_1 = \varphi(\xi) + \frac{x - \xi}{\varphi'(\xi)}, \\ z_1 = F\left[x, \varphi(\xi) - \frac{x - \xi}{\varphi'(\xi)}\right], \end{cases}$$

dans lesquelles x et ξ doivent être regardés comme deux paramètres indépendants.

Remarque. — Ce théorème n'est pas applicable quand S est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z . Mais dans ce cas on peut mettre à profit la remarque précédente.

§ II.

Exemples. — 1. La figure objective est une droite. Puisqu'on peut prendre

$$x = 0, \quad y = t \sin \theta, \quad z = t \cos \theta$$

(θ étant une constante) sans nuire à la généralité, la première condition (1) donne

$$t = \frac{\xi\xi' + \eta_1\eta_1'}{\eta_1' \sin \theta}.$$

La droite donnée L a donc pour symétrique L_1 la courbe

$$(5) \quad x_1 = 2\xi, \quad y_1 = \frac{\eta_1\eta_1' - \xi\xi'}{\eta_1'}, \quad z_1 = \frac{\xi\xi' + \eta_1\eta_1'}{\eta_1'} \cot \theta,$$

et pour projection orthogonale sur le cylindre K la ligne Λ , qu'on obtient en portant sur les génératrices de

celui-ci des hauteurs $\zeta (= z_1)$ données par la troisième égalité (5).

En supposant

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = k$$

(α, β, γ, k étant des constantes), les équations (5) donnent

$$2\alpha\xi\eta' + \beta(\eta\eta' - \xi\xi') + \gamma \cot\theta (\xi\xi' + \eta\eta') = k\eta'.$$

Cette équation, bien qu'elle ne soit pas intégrable dans le cas général, démontre que, sous certaines conditions, une droite peut avoir une symétrie plane.

Si $\alpha = 0$, on a, l'intégration étant effectuée,

$$(\gamma \cot\theta - \beta)\xi^2 + (\gamma \cot\theta + \beta)\eta^2 - 2k\eta = h \quad (h = \text{const.}).$$

Donc, si la ligne symétrique d'une droite est sur un plan perpendiculaire au plan déterminé par la droite donnée et la direction des génératrices du cylindre ichnographique, la section droite de celui-ci est une conique à centre.

En supposant

$$\zeta = z_1 = a\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

($a = \text{const.}$), la troisième équation (5) donne par intégration

$$\xi^2 + \eta^2 = (a \tan\theta \cdot \eta + b)^2.$$

Par conséquent, si la projection orthogonale Λ d'une droite L sur un cylindre K s'obtient en portant sur les génératrices des distances proportionnelles aux rayons vecteurs R de la section droite de K , cette section droite est une conique à centre. L'origine des rayons vecteurs R est au centre de cette conique.

Quand on donne arbitrairement le cylindre K , on peut tracer sur sa surface une ligne Λ sous des con-

ditions telles qu'elle soit la projection orthogonale d'une certaine droite.

En effet, supposons que l'on ait

$$(6) \quad \xi = \varphi(\sigma) \quad \eta = \int \sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)} \, d\sigma,$$

σ étant l'arc de la section droite Λ_0 de K .

En remarquant que le rayon de courbure de Λ_0 est donné par l'égalité

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varphi''(\sigma)}{\sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}},$$

on déduit de là

$$\varphi(\sigma) = \int \sin \left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho} \right) d\sigma + h,$$

k et h étant deux constantes arbitraires.

De plus, la troisième égalité (5) donne

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= \left[\int \sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)} \, d\sigma + \frac{\varphi(\sigma) \varphi'(\sigma)}{\sqrt{1 - \varphi'^2(\sigma)}} \right] \cot \theta \\ &= \left\{ \int \cos \left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho} \right) d\sigma + \tan \theta \left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[\int \sin \left(k + \int \frac{d\sigma}{\rho} \right) d\sigma + h \right] \right\} \cot \theta. \end{aligned} \right.$$

Pour construire la ligne Λ dont on vient de parler, il suffit donc de plier, sur le cylindre K , le plan de la ligne L_0 représentée par la première ou par la deuxième équation (7), suivant que la section droite Λ_0 du cylindre K est définie par les équations (6) ou par l'équation intrinsèque $\rho = \rho(\sigma)$.

Si, par exemple, la section droite de K est une chaînette ou un cercle, on a respectivement

$$\varphi(\sigma) = \sqrt{a^2 + \sigma^2}, \quad \rho = a.$$

La détermination de Λ se fait donc par la construction indiquée, en opérant sur les lignes planes L_0 représen-

tées respectivement par les équations cartésiennes :

$$\zeta = \left(a \log \frac{\sqrt{a^2 + \sigma^2} + \sigma}{a} + \frac{\sigma \sqrt{a^2 + \sigma^2}}{a} \right) \cot \theta,$$

$$\zeta = h \cot \theta \cdot \operatorname{tang} \left(k + \frac{\sigma}{a} \right).$$

2. Si la section droite du cylindre K est la parabole

$$\eta = \varphi(\xi) = \frac{\xi^2}{a},$$

et si la surface objective S est le plan

$$z = F(x, y) = mx,$$

passant par l'axe de la parabole précitée, l'élimination des deux paramètres x, ξ entre les égalités (4) conduit à l'équation

$$4am^2y_1(mx_1 + z_1) = (mx_1 + z_1)^3 - 2a^2m^2(mx_1 - z_1).$$

Celle-ci démontre que *le plan donné a pour symétrique une surface algébrique du troisième ordre.*

§ III.

Quand on donne le cylindre ichnographique K et la ligne Λ , projection orthogonale d'une ligne inconnue L , on peut déterminer cette ligne et sa symétrique L_1 d'une infinité de manières, car la seule condition à vérifier, c'est que les lignes L, L_1 soient sur la surface réglée Σ lieu des normales au cylindre K le long de Λ . Si l'on a recours à la première condition (1), et si l'on remarque, de plus, que pour chaque point de Σ on a $z = \zeta$, on peut énoncer ce théorème :

La surface réglée Σ à plan directeur, ayant la ligne $\xi = \lambda(\zeta), \eta = \mu(\zeta)$ pour trajectoire orthogonale

de ses génératrices, est représentée par l'équation

$$[x - \lambda(z)]\lambda'(z) + [y - \mu(z)]\mu'(z) = 0.$$

On voit par là que, si la ligne Λ est de l'ordre n , la surface réglée Σ est de l'ordre $2n - 1$.

§ IV.

PROBLÈME. — *On demande de déterminer d'abord les conditions sous lesquelles on doit prendre deux figures F, F_1 pour que celles-ci puissent être considérées comme deux figures symétriques par rapport à un cylindre, et ensuite de trouver un tel cylindre.*

PREMIER CAS. — *Les figures données sont deux lignes L, L_1 .*

Ces lignes L, L_1 ne peuvent pas être tracées d'une façon absolument arbitraire.

En effet, si l'on suppose que les génératrices du cylindre ichnographique soient parallèles à l'axe des z , menons une suite de droites parallèles au plan $z = 0$ et s'appuyant aux deux courbes L, L_1 ; la correspondance entre les points de celles-ci est alors fixée complètement. Conséquemment on ne peut pas assujettir les droites AA_1 , joignant les couples de points correspondants des lignes L, L_1 , à la condition d'être normales au cylindre K (passant par les milieux des segments AA_1 et ayant les génératrices parallèles à l'axe des z).

On peut cependant démontrer qu'on peut prendre arbitrairement une des lignes L, L_1 et le cylindre sur lequel l'autre doit être placée.

Si, en effet, L_0, L_{10} sont les projections des lignes L, L_1 sur le plan $z = 0$, supposons qu'on prenne L et L_{10} d'une façon arbitraire.

Le problème proposé est résolu dès qu'on a déterminé la loi de correspondance entre les points A_0 , A_{10} des lignes L_0 , L_{10} . Car il suffit alors de mener des parallèles aux droites A_0 , A_{10} par les points de L . Ces parallèles vont couper le cylindre, dont L_0 est la section droite, suivant la ligne L_1 symétrique de L .

On voit donc que la seule condition qu'on doit exprimer est que la ligne A_0 , lieu des milieux des segments A_0 , A_{10} , est une trajectoire orthogonale de ces droites. Or, les cosinus directeurs des segments A_0 , A_{10} et ceux de la tangente à A_0 sont proportionnels respectivement aux différences

$$x - x_1, \quad y - y_1,$$

et aux quantités

$$d(x + x_1), \quad d(y + y_1).$$

La condition à vérifier est donc la suivante

$$(8) \quad (x - x_1)(dx + dx_1) + (y - y_1)(dy + dy_1) = 0.$$

Et comme celle-ci est réductible à une relation différentielle entre les paramètres t , t_1 , en fonction desquels on peut supposer que soient exprimés (x, y) et (x_1, y_1) respectivement, la détermination de la loi de correspondance dont on vient de parler est ramenée à l'intégration de l'équation (8).

Remarque. — Si l'on exprime les variables x, y, x_1, y_1 en fonction de ξ et η , en ayant recours aux égalités (2) et aux équations

$$y = F(x), \quad y_1 = F_1(x_1),$$

des lignes données L_0 , L_{10} , l'équation (8) se réduit à une relation différentielle entre ξ, η .

L'intégration de celle-ci définit la ligne A_0 et consé-

quement le cylindre K. A ce point, le problème doit être regardé comme résolu.

§ V.

EXEMPLE. — La ligne donnée L et la ligne L₁ sont sur deux plans Π, Π_1 parallèles à l'axe des z .

Si l'on suppose que Π soit le plan coordonné $y=0$ et que Π_1 passe par l'axe des z et soit incliné de l'angle θ sur Π , on a

$$x = t, \quad y = 0, \quad x_1 = t_1 \cot \theta, \quad y_1 = t_1.$$

La première méthode conduit à l'équation différentielle

$$(9) \quad \sin \theta (t \sin \theta - t_1 \cos \theta) dt + (t \sin \theta \cos \theta - t_1) dt_1 = 0,$$

qu'on ne sait pas intégrer dans le cas général.

Quant à la deuxième méthode, si l'on remarque que

$$y_1 = 2\eta, \quad x_1 = 2\eta \cot \theta, \quad x = 2\xi - x_1 = 2\xi - 2\eta \cot \theta,$$

on arrive à l'équation différentielle

$$\xi d\xi - \eta d\eta - \cot \theta \cdot \eta d\xi = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$\begin{aligned} & (\xi^2 - 2\xi\eta \cdot \cot \theta - \eta^2) [\sin \theta \cdot \xi + (1 - \cos \theta) \eta] \cos \theta \\ & = c [\sin \theta \cdot \xi - (1 + \cos \theta) \eta] \cos \theta, \end{aligned}$$

c étant une constante arbitraire.

En décomposant le trinôme

$$\xi^2 - 2\xi\eta \cdot \cot \theta - \eta^2,$$

en facteurs linéaires, on peut donner à l'équation ci-dessus la forme

$$(10) \quad [\xi \sin \theta + (1 - \cos \theta) \eta]^{1+\cos \theta} [\xi \sin \theta - (1 + \cos \theta) \eta]^{1-\cos \theta} = c.$$

Celle-ci définit la section droite du cylindre K; l'indétermination de c nous apprend que le problème proposé est résolvable d'une infinité de manières.

Remarque. — La surface symétrique du plan Π par rapport au cylindre K qu'on vient de déterminer est l'autre plan Π_1 .

Cas particulier. — Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'équation (9) se réduit à cette autre :

$$t_1 dt_1 = t dt;$$

d'où, par intégration,

$$t_1 = \sqrt{t^2 - 4c},$$

c étant une constante arbitraire.

Il en résulte alors

$$\xi = \frac{x + x_1}{2} = \frac{t}{2}, \quad \eta = \frac{y + y_1}{2} = \frac{\sqrt{t^2 - 4c}}{2}$$

et

$$(11) \quad \xi^2 - \eta^2 = c.$$

Cette équation peut aussi se déduire de l'égalité (10), en y supposant $\theta = \frac{\pi}{2}$.

L'analyse précédente démontre que :

Si la ligne L du plan $y = 0$, représentée par l'équation $z = f(x)$, a pour symétrique une ligne L_1 du plan $x = 0$:

1° *Le cylindre ichnographique K a pour section droite une hyperbole équilatère quelconque (11), dont les asymptotes sont les axes coordonnés.*

2° *La ligne L_1 est représentée par l'équation*

$$z_1 = f(\sqrt{y_1^2 + 4c}).$$

Si, par exemple, on suppose successivement

$$z = f(x) = \left(\alpha x + \beta, \sqrt{\alpha x^2 + \beta}, \frac{x^2}{a}, \sqrt{\alpha x}, \dots \right),$$

ou a respectivement

$$\begin{aligned} (z_1 - \beta)^2 - \alpha^2 y_1^2 &= 4x^2 c, & z_1^2 - \alpha y_1^2 &= 4\alpha c + \beta, \\ z_1 - \frac{4c}{a} &= \frac{y_1^2}{a}, & z_1 &= \alpha^2 (y_1^2 + 4c), & \dots \end{aligned}$$

Donc : Quand L est une droite, ou une conique à centre, ou une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des z , ou une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des x , la ligne symétrique L_1 est respectivement une conique à centre, une conique à centre, une parabole dont l'axe coïncide avec l'axe des z , une ligne du quatrième ordre.

§ VI.

SECOND CAS. — Les figures données sont deux surfaces S, S_1 .

Quelles que soient ces surfaces, on peut les représenter par les équations

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(v), \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = F(t, v), \\ y_1 = \Phi(t, v), \\ z_1 = \Psi(v), \end{cases}$$

u et v étant deux paramètres indépendants et t un troisième paramètre qu'on doit regarder comme une fonction (inconnue) de u et v .

Puisque la condition $z_1 = z$ est remplie quelle que

soit la valeur des paramètres u et v , il ne nous reste qu'à vérifier les deux conditions suivantes :

a. Que le lieu des milieux A_0 des segments AA_1 , joignant les couples de points correspondants A , A_1 des surfaces S , S_1 , est un cylindre K dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z .

b. Que les droites AA_1 sont normales à ce cylindre K .

Puisque la coordonnée ζ de A_0 est une fonction du paramètre v , la condition (*a*) équivaut à cette autre que les coordonnées ξ , η soient des fonctions de l'autre paramètre u .

On doit donc avoir [formules (2)]

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0.$$

La condition (*b*) est vérifiée, si les droites AA_1 sont normales aux sections droites correspondantes de K (représentées par l'équation $v = \text{const.}$). Or les cosinus directeurs de la tangente aux lignes $v = \text{const.}$ sont proportionnels aux quantités

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

et ceux de la droite AA_1 sont proportionnels aux différences

$$f - F, \quad \varphi - \Phi.$$

Il s'ensuit que la condition ultérieure à vérifier est exprimée par l'équation

$$(13) \quad (f - F) \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} \right) + (\varphi - \Phi) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) = 0.$$

Conséquemment, les surfaces S , S_1 ne peuvent pas être prises arbitrairement d'avance, les fonctions f , φ , F , Φ , ψ , t étant liées par les relations (12), (13).

§ VII.

Exemple. — Les surfaces S, S_1 sont définies par les équations

$$(14) \quad \begin{cases} x = l(u) + m(v), \\ y = l_1(u) + m_1(v), \\ z = \psi(v), \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda(u) + \mu(v), \\ y_1 = \lambda_1(u) + \mu_1(v), \\ z_1 = \psi(v). \end{cases}$$

Les conditions (12) donnent

$$(16) \quad \mu(v) = -m(v) + \alpha, \quad \mu_1(v) = -m_1(v) + \beta,$$

(α, β constantes) et la condition (13) se réduit à

$$(17) \quad \begin{cases} (l - \lambda)(l' + \lambda') + (2m - \alpha)(l' + \lambda') \\ + (l_1 - \lambda_1)(l'_1 + \lambda'_1) + (2m_1 - \beta)(l'_1 + \lambda'_1) = 0, \end{cases}$$

d'où, en dérivant par rapport à v ,

$$m'(l' + \lambda') + m'_1(l'_1 + \lambda'_1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{m'_1}{m'} = - \frac{l' + \lambda'}{l'_1 + \lambda'_1}.$$

En remarquant que le premier membre est une fonction de v et le deuxième une fonction de u , on doit avoir

$$\frac{m'_1}{m'} = a, \quad \frac{l' + \lambda'}{l'_1 + \lambda'_1} = -a,$$

a étant une constante.

On trouve par intégration

$$(18) \quad m_1 = am + b, \quad \lambda_1 = - \frac{\lambda + l + al_1 + c}{a}$$

(b, c constantes); et, en vertu de ces équations, on déduit de l'égalité (17)

$$[(a^2+1)\lambda - (a^2-1)l + 2al_1 + a^2\alpha + 2ab - a\beta + c](l' + \lambda') = 0.$$

Celle-ci se dédouble de la façon suivante :

$$(19) \quad \begin{cases} l' + \lambda' = 0, \\ (a^2+1)\lambda - (a^2-1)l + 2al_1 + a^2\alpha + 2ab - a\beta + c = 0. \end{cases}$$

Si la première condition (19) a lieu, l'intégration donne

$$(20) \quad \lambda = -l + e, \quad (e = \text{const.}),$$

ce qui réduit la deuxième équation (18) à cette autre

$$(21) \quad \lambda_1 = -l_1 - \frac{c+e}{a}.$$

Dans ce cas, les équations (14), (15), en vertu des égalités (16), (18), (20), (21), deviennent

$$(22) \quad \begin{cases} x = l(u) + m(v), \\ y = l_1(u) + a m(v) + b, \\ z = \psi(v), \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} x_1 = -l(u) - m(v) + (\alpha + e), \\ y_1 = -l_1(u) - a m(v) - b + \left(\beta - \frac{c+e}{a}\right), \\ z_1 = \psi(v); \end{cases}$$

et, comme les équations (2) donnent

$$(24) \quad \xi = \frac{\alpha+e}{2}, \quad \tau_i = \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{c+e}{a}\right), \quad \zeta = \psi(v),$$

on en conclut que le cylindre ichnographique se réduit à une droite; les deux surfaces S, S_1 sont donc égales.

Si la deuxième condition (19) a lieu, on en déduit

$$\lambda = \frac{(a^2-1)l - 2al_1 - a^2\alpha - 2ab + a\beta - c}{a^2+1}.$$

Si donc on suit un développement tout à fait analogue au précédent, on trouve que les équations (22) restent inaltérées et (23), (24) sont remplacées par les suivantes :

$$(25) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{(a^2 - 1) l(u) - 2a l_1(u)}{a^2 + 1} - m(v) + \frac{\alpha + a\beta - 2ab - c}{a^2 + 1}, \\ y_1 = -\frac{2a l(u) + (a^2 - 1) l_1(u)}{a^2 + 1} - am(v) + \frac{\alpha(\alpha + a\beta - ab - c) + b}{a^2 + 1}, \\ z_1 = \psi(v), \\ \xi = \frac{a^2 l(u) - a l_1(u)}{a^2 + 1} + \frac{\alpha + a\beta - 2ab - c}{2(a^2 + 1)}, \\ \eta = \frac{-al(u) + l_1(u)}{a^2 + 1} + \frac{\alpha(\alpha + a\beta - c) + 2b}{2(a^2 + 1)}, \\ \zeta = \psi(v). \end{cases}$$

Comme les dernières équations donnent

$$\xi + a\eta = \frac{\alpha + a\beta - c}{2},$$

on en conclut que, dans ce cas, le cylindre ichnographique se réduit à un plan et que les deux surfaces S, S_1 représentées par les équations (22), (25), sont symétriques par rapport à ce plan.

§ VIII.

En supposant que x, y, ξ, η soient liées par les relations

$$x = f(\xi), \quad y = \varphi(\eta),$$

la condition fondamentale (1) fait voir que : *la section droite du cylindre ichnographique est représentée par l'équation*

$$\xi^2 + \eta^2 + c = 2 \int f(\xi) d\xi + 2 \int \varphi(\eta) d\eta.$$

En particulier : Quand $x = a\xi$, $y = b\eta$, le cylindre ichnographique a pour section droite la conique à centre

$$(a-1)\xi^2 + (b-1)\eta^2 = c.$$

La ligne objective L et sa symétrique L_1 sont placées sur deux cylindres, dont les sections droites sont les deux coniques à centre

$$\frac{a-1}{a^2}x^2 + \frac{b-1}{b^2}y^2 = c, \quad \frac{a-1}{(2-a)^2}x_1^2 + \frac{b-1}{(2-b)^2}y_1^2 = c.$$

Pareillement, quand ont lieu les relations

$$\xi = F(x), \quad \eta = \Phi(y),$$

ou bien les suivantes

$$x_1 = \lambda(x), \quad y_1 = \mu(y),$$

la section droite du cylindre contenant la ligne objective L est représentée respectivement par les équations

$$\begin{aligned} F^2(x) + \Phi^2(y) - 2 \int x F'(x) dx - 2 \int y \Phi'(y) dy &= c, \\ \lambda^2(x) + \mu^2(y) - (x^2 + y^2) \\ - 2 \int x \lambda'(x) dx - 2 \int y \mu'(y) dy + 4 \int \lambda(x) dx + 4 \int \mu(y) dy &= c, \end{aligned}$$

c étant une constante.

Les sections droites l , l_1 des cylindres contenant les lignes symétriques L, L_1 , peuvent-elles devenir deux courbes homothétiques, après la rotation de l'une d'entre elles autour d'un point?

Si l'origine des axes est le centre de rotation (ce qui n'est pas une particularité) on doit avoir

$$(26) \quad x_1 = k(x \cos \theta - y \sin \theta), \quad y_1 = k(x \sin \theta + y \cos \theta),$$

k et θ étant deux constantes.

(124)

Dans cette hypothèse, la condition (8) devient

$$x dx + y dy = \frac{2k \sin \theta}{k^2 - 1} (y dx - x dy),$$

c'est-à-dire (en posant $x = R \cos u$, $y = R \sin u$)

$$\frac{dR}{R} = \frac{2k \sin \theta}{1 - k^2} du.$$

On trouve par intégration

$$(27) \quad R = a e^{\frac{2k \sin \theta}{1 - k^2} u},$$

a étant une constante arbitraire.

De même, en posant $x_1 = R_1 \cos u_1$, $y_1 = R_1 \sin u_1$, on en déduit

$$R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = k R, \quad \cot u_1 = \frac{x_1}{y_1} = \cot(u + \theta),$$

et conséquemment

$$(28) \quad R_1 = a k e^{\frac{2k \sin \theta}{1 - k^2} (u_1 - \theta)}.$$

On a, en outre,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x + x_1}{2} = \frac{(1 + k \cos \theta)x - k \sin \theta y}{2}, \\ \eta &= \frac{y + y_1}{2} = \frac{k \sin \theta x + (1 + k \cos \theta)y}{2}, \end{aligned}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned} R_0 &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\sqrt{k^2 + 2k \cos \theta + 1}}{2} R, \\ \cot u_0 &= \frac{\xi}{\eta} = \frac{(1 + k \cos \theta) \cot u - k \sin \theta}{k \sin \theta \cot u + (1 + k \cos \theta)}. \end{aligned}$$

En résolvant la dernière équation par rapport à $\cot u$, on trouve

$$\begin{aligned} \cot u &= \frac{k \sin \theta + (1 + k \cos \theta) \cot u_0}{(1 + k \cos \theta) - k \sin \theta \cot u_0} \\ &= \cot \left[u_0 + \arccot \left(- \frac{1 + k \cos \theta}{k \sin \theta} \right) \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$(29) \quad R_0 = \frac{\alpha \sqrt{k^2 + 2k \cos \theta + 1}}{2} e^{\frac{2\lambda \sin \theta}{1-k^2} \left[u_0 + \operatorname{arc cot} \left(-\frac{1+k \cos \theta}{k \sin \theta} \right) \right]}.$$

Les équations (27), (28), (29) démontrent que *les projections l, l_1 des lignes symétriques L, L_1 sur le plan coordonné $z = 0$ et la section droite du cylindre ichnographique K sont trois spirales logarithmiques égales* ⁽¹⁾, *ayant leurs pôles en un même point (l'origine).*

Remarque. — Les trois spirales logarithmiques reviennent à trois cercles, quand $\theta = 0$, ou $\theta = \pi$.

Les deux lignes symétriques L, L_1 peuvent-elles être des lignes égales, avec la condition que les couples de points homologues dans l'égalité soient aussi correspondants dans la symétrie?

Puisqu'on a toujours $z_1 = z$, la propriété susdite est vérifiée quand ont lieu les relations qu'on peut déduire des équations (26), en y supposant $k = 1$.

Dans cette hypothèse, on a

$$y \, dx - x \, dy = 0,$$

d'où, par intégration,

$$y = \alpha x,$$

α étant une constante.

Cette équation (en remarquant que $x = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta$, $y = -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta$) donne

$$y_1 = \frac{\sin \theta + \alpha \cos \theta}{\cos \theta - \alpha \sin \theta} x_1.$$

⁽¹⁾ Ce résultat n'est pas en contradiction avec la condition posée dans le problème, comme on peut le supposer au premier abord; en effet, deux spirales logarithmiques semblables sont aussi des lignes égales.

En outre

$$\eta = \frac{y + y_1}{x + x_1} \xi = \frac{\sin \theta + \alpha(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta) - \alpha \sin \theta} \xi.$$

Cette analyse démontre que les cylindres projetant les lignes symétriques L, L₁ sur le plan $z=0$, et le cylindre ichnographique K sont réduits à trois plans passant par une droite.

On doit donc répondre négativement à la question énoncée plus haut.
