

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1899. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 18
(1899), p. 574-579

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__574_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES
DES FACULTÉS DES SCIENCES.**

SESSION DE JUILLET 1899. — COMPOSITIONS.

Caen.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

I. *Les axes coordonnés étant rectangulaires sur la circonférence*

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

on considère le point A, d'abscisse a, et un point variable M, que l'on joint au point P, de coordonnées 0, 0, $\overline{AM}$. Calculer le volume compris entre OXY et la surface engendrée par la droite MP quand le point M parcourt la circonférence; moment d'inertie de ce volume, supposé homogène, autour de OZ. Trajectoires orthogonales des génératrices MP.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires, dont OZ est dirigé dans le sens de la pesanteur, on considère la courbe C.*

$$y = 0, \quad z(a^2 + x^2) = a^3,$$

qui coupe OZ en A. Un tube très étroit, dont l'axe coïncide avec un arc B'AB de C, peut tourner autour de OZ; il renferme une petite masse m qui peut y glisser sans frottement. A l'instant initial, le tube tourne autour de OZ avec une vitesse ω , le point X_m est en A avec une vitesse V, et le système est abandonné à lui-même. Déterminer ω et le moment d'inertie I du tube

autour de OZ de sorte que la vitesse de glissement de m dans le tube reste constante.

I. $V = \frac{4}{3}a^3, \quad I = \frac{2}{5}a^5;$
projection d'une trajectoire sur OXY :

$$(a-r)^2(1 + 4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta) = C^2.$$

II. r et θ étant les coordonnées polaires de la projection de m sur OXY, si l'on élimine $\frac{d\theta}{dt}$ entre les équations des aires et des forces vives, V disparaît et l'on a

$$\frac{I^2 \omega^2}{I + mr^2} - I \omega^2 + \frac{2mgr^2}{a^2 + r^2} = 0;$$

pour que cette équation soit vérifiée quel que soit r , il faut

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}, \quad I = ma^2.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En un point de l'équateur, on trouve h et h' pour les hauteurs d'une même étoile à deux époques séparées par un intervalle de six heures sidérales : calculer la déclinaison de l'étoile.*

$$\sin^2 D = \cos(h + h') \cos(h - h').$$

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. *Définir les systèmes différentiels orthonomes et montrer que la définition est satisfaite par le système*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v(1+u) \frac{\partial u}{\partial y} + (1-2u) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + u^2 + v, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

Vérifier que la condition de passivité relative à la dérivée cardinale $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial z}$ est identiquement satisfaite : puis, supposant la même vérification faite pour les deux autres conditions de passivité, chercher l'économie des conditions initiales dont la donnée suffit à déterminer une solution ordinaire du système proposé.

II. Étant donnés trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, déterminer une surface dont les sections parallèles à ZOZ soient des lignes de courbure et qui se raccordent avec la surface

$$x^3 + yx^2 - y^2 - z^2 - x - 1 = 0,$$

tout le long de sa trace sur le plan YOZ.

II. Une première intégration donne

$$q = \sqrt{1+p^2} \varphi(y) :$$

le long de la courbe proposée, $p = \frac{1}{2\sqrt{1+y^2}}$, $q = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$, donc

$$\varphi(y) = \frac{y}{\sqrt{4y^2+5}}.$$

On a à intégrer une équation du premier ordre dont l'intégrale est

$$z = C + \frac{1}{2} \sqrt{4y^2+5} - (1-2x)^2;$$

on trouve que C est nul et que la surface cherchée est un hyperboloïde de révolution.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver l'intégrale générale du système

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

en prenant pour variables indépendantes

$$x' = a_1 x + b_1 y, \quad y' = a_2 x + b_2 y$$

et choisissant a_1, b_1, a_2, b_2 de sorte que la première des équations transformées ne renferme que $\frac{\partial z}{\partial x'}, \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'},$ et la seconde que $\frac{\partial z}{\partial y'}, \frac{\partial^2 z}{\partial y' \partial x'}, \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}.$

On peut prendre $a_1 = b_1 = a_2 = 1, b_2$ égal à une racine cubique imaginaire de l'unité, et l'on trouve

$$z = A e^{x+y} + \left(B \cos \frac{x-y}{2} \sqrt{3} + C \sin \frac{x-y}{2} \sqrt{3} \right) e^{\frac{x+y}{2}} + D.$$

MÉCANIQUE.

I. Sur un cône dont les génératrices font un angle de 30° avec l'axe OZ, trouver une courbe C telle qu'un point de masse m , assujéti à rester sur C et attiré vers OZ par une force égale au produit de m par une constante λ^2 et par la distance de m à OZ, arrive en un point déterminé de C au bout du temps $\frac{\pi}{\lambda}$, quel que soit le point d'où il part sans vitesse initiale. Montrer que C est une géodésique du cône.

II. Une couche sphérique homogène, soustraite à l'action de toute force extérieure, peut tourner autour d'un de ses points O, qui est fixe; à l'instant initial, elle tourne avec une vitesse ω , autour d'un axe instantané OI qui fait un angle de 45° avec le diamètre OM. Mouvement ultérieur, pression sur le point O, calcul du temps au bout duquel OM sera perpendiculaire à sa direction initiale.

I. On doit avoir sur C :

$$-\lambda^2 u \frac{du}{dS} = -\frac{\pi^2}{4T^2} S = -\frac{\lambda^2 S}{4};$$

on en tire $n = \frac{a}{\cos^2 \psi}$, et la relation $\frac{ud\psi}{dS} = \frac{a}{u}$ caractérise une géodésique sur une surface de révolution.

II. L'axe OS du couple des quantités de mouvement, qui est fixe dans l'espace, est situé dans le plan IOM₀, faisant avec OM l'angle θ dont la tangente est $\frac{5}{2}$; les cônes de Poinsoï sont de révolution : $\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega\sqrt{2g}}{5\sqrt{2}}$.

Le centre de gravité décrit uniformément un cercle, d'où l'on conclut la charge du point O, égale à

$$M\alpha\psi^2 \sin \theta = \frac{M\alpha\omega^2\sqrt{2g}}{10}.$$

Enfin le temps au bout duquel OM sera perpendiculaire à sa direction initiale est donné par l'équation

$$\cos \frac{\omega t\sqrt{2g}}{5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une manivelle OA, de 1^m de long, tourne uniformément autour de O en faisant trois tours par seconde; elle est articulée à une bielle AB, longue de 2^m, dont l'extrémité B glisse sur une droite OX. Calculer la vitesse de B quand AOB est égal à 60°.

Le mouvement de la bielle peut s'obtenir en la liant à une courbe qui roulerait sans glisser sur une courbe fixe : déterminer ces deux courbes.

$$V = -\frac{3\pi\sqrt{3}(1+\sqrt{13})}{\sqrt{13}};$$

(579)

courbe fixe :

$$y^2 = \frac{x^2(x^2-1)(9-x^2)}{(x^2-3)^2}.$$

roulante :

$$r = 1 + \frac{3}{1 + 2 \cos \theta}.$$