

ANTOINE PLESKOT

Limites des racines d'une équation n'ayant que des racines réelles

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 18
(1899), p. 301-305

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__301_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1899, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[A 3g]

**LIMITES DES RACINES D'UNE ÉQUATION
N'AYANT QUE DES RACINES RÉELLES;**

PAR M. ANTOINE PLESKOT,

Professeur à l'École royale de Plzeň (Bohème).

Nous nous proposons de montrer dans cette Note comment, à l'aide de la théorie des maxima et des minima, on peut déterminer les limites des racines d'une équation qui n'a que des racines réelles.

Soit

$$(1) \quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

une équation n'ayant que des racines réelles.

Désignons la somme des $k^{\text{ièmes}}$ puissances des racines $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ de cette équation par s_k , de sorte que

$$s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots + x_n^k.$$

On sait que s_k peut s'exprimer rationnellement en fonction des coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Considérons maintenant $n - 2$ racines, à savoir $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$, comme des variables indépendantes, et considérons par contre les deux restantes x_1 et x_n comme fonctions des autres, définies par les deux équations

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = s_1, \\ x_1^{2k} + x_2^{2k} + x_3^{2k} + \dots + x_n^{2k} = s_{2k}, \end{cases}$$

dans lesquelles s_1 et s_{2k} sont des constantes données.

Nous allons chercher à trouver le système de valeurs de $x_2, \dots, x_{n-1}$ pour lesquelles la fonction de x_n ainsi définie devient un maximum ou un minimum.

En effectuant la différentiation, on aura

$$dx_1 - dx_2 + dx_3 + \dots - dx_n = 0, \\ x_1^{2k-1} dx_1 + x_2^{2k-1} dx_2 + x_3^{2k-1} dx_3 + \dots + x_n^{2k-1} dx_n = 0,$$

relations d'où l'on déduit, en éliminant dx_1 ,

$$(\beta) \quad \begin{cases} dx_2(x_2^{2k-1} - x_1^{2k-1}) + dx_3(x_3^{2k-1} - x_1^{2k-1}) + \dots \\ + dx_n(x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}) = 0. \end{cases}$$

On a donc, pour le système spécial de valeurs de $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ dans lequel x_n devient soit un maximum soit un minimum, les équations suivantes :

$$x_2^{2k-1} - x_1^{2k-1} = 0, \quad x_3^{2k-1} - x_1^{2k-1} = 0, \quad x_{n-1}^{2k-1} - x_1^{2k-1} = 0,$$

ou, puisqu'il s'agit de valeurs réelles, les équations

$$(\gamma) \quad x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1}.$$

On doit joindre ces $n - 2$ équations aux deux équations (α) pour déterminer les quantités encore inconnues x_1 et x_n ; de là suit le système

$$(\delta) \quad \begin{cases} (n-1)x_1 + x_n = s_1, \\ (n-1)x_1^{2k} + x_n^{2k} = s_{2k}, \end{cases}$$

dont on peut tout de suite tirer les quantités x_1 et x_n .

Il reste encore à montrer quand x_n devient le maximum et quand il devient le minimum. Pour cela déterminons $d^2 x_n$.

Si l'on différentie (β) , on aura

$$\sum_{v=2}^{v=n} (x_v^{2k-1} - x_1^{2k-1}) d^2 x_v \\ + (2k-1) \sum_{v=2}^{v=n} (x_v^{2k-2} dx_v - x_1^{2k-2} dx_1) dx_v = 0.$$

Mais, pour le système spécial $x_1, \dots, x_n$, on a

$$dx_n = 0,$$

et, si l'on se sert des équations (γ), on aura tout d'abord l'équation

$$(x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}) d^2 x_n + (2k-1)x_1^{2k-2} \left(\sum_{\nu=2}^{n-1} dx_\nu^2 - dx_1 \sum_{\nu=2}^{n-1} dx_\nu \right) = 0.$$

Or, à cause de l'équation

$$\sum_{\nu=2}^{n-1} dx_\nu = -dx_1,$$

notre résultat doit prendre la forme

$$d^2 x_n = - (2k-1)x_1^{2k-2} \frac{\sum_{\nu=2}^{n-1} dx_\nu^2}{x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}}.$$

Le numérateur du second membre est toujours positif; $d^2 x_n$ devient donc positif quand

$$x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}$$

est négatif, et il devient négatif quand

$$x_n^{2k-1} - x_1^{2k-1}$$

est positif.

Il s'ensuit que x_n a la plus grande valeur quand $x_n > x_1$ et la plus petite quand $x_n < x_1$.

La résolution de l'équation (δ) nous donne deux systèmes de valeurs des quantités x_1 et x_n , comme il va être démontré. Pour le premier système on a $x_n > x_1$, et alors x_n est la racine la plus grande, puisque toutes les autres égalent x_1 ; pour la deuxième on a $x_n < x_1$, et alors x_n est la plus petite racine.

Il nous reste encore à tirer du système (δ) les valeurs de x_1 et de x_n . Le système aura une forme bien simple si $s_1 = 0$.

Transformons donc l'équation (1) en faisant la substitution

$$x = y - \frac{\alpha_1}{n}.$$

Elle deviendra

$$\psi(y) = y^n + a_2 y^{n-2} + a_3 y^{n-3} + \dots + a_n = 0.$$

Désignons maintenant la somme des puissances k des racines de cette équation par σ_k , le système (δ) se transformera en

$$\begin{aligned} (n-1)y_1 + y_n &= 0, \\ (n-1)y_1^k + y_n^k &= \sigma_{2k}, \end{aligned}$$

parce que $\sigma_1 = 0$.

Il résulte de ces équations

$$\begin{aligned} y_n &= \pm (n-1) \sqrt[2k]{\frac{\sigma_{2k}}{(n-1)[1+(n-1)^{2k-1}]}} \\ y_1 &= \mp \sqrt[2k]{\frac{\sigma_{2k}}{(n-1)[1+(n-1)^{2k-1}]}}. \end{aligned}$$

La valeur y_n est donc positive pour le signe supérieur et négative pour le signe inférieur.

La valeur positive de y_n fait atteindre à y_n son maximum et la valeur négative son minimum.

La valeur la plus grande et la plus petite que x_n puisse atteindre sont donc

$$x_n = y_n - \frac{\alpha_1}{n} = -\frac{\alpha_1}{n} \pm (n-1) \sqrt[2k]{\frac{\sigma_{2k}}{(n-1)[1+(n-1)^{2k-1}]}}.$$

Le signe supérieur correspond au maximum et le signe inférieur au minimum.

σ_{2k} peut aussi s'exprimer par s_{2k} . On a les équations

$$y = x + \frac{\alpha_1}{n},$$

et

$$\sum y^{2k} = \sigma_{2k} = \sum \left(x + \frac{a_1}{n} \right)^{2k};$$

donc

$$\sigma_{2k} = \frac{n^{2k} s_{2k} + n^{2k-1} (2k)_1 a_1 s_{2k-1} + n^{2k-2} (2k)_2 a_1^2 s_{2k-2} + \dots + n a_1^{2k}}{n^{2k}}.$$

En introduisant les valeurs s_k , les limites des racines de l'équation (1) prennent donc, pour la limite inférieure, la forme

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{n^{2k} s_{2k} + n^{2k-1} (2k)_1 a_1 s_{2k-1} + n^{2k-2} (2k)_2 a_1^2 s_{2k-2} + \dots + n a_1^{2k}}{[1 + (n-1)^{2k-1}](n-1)}},$$

et, pour la limite supérieure,

$$-\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{n^{2k} s_{2k} + n^{2k-1} (2k)_1 a_1 s_{2k-1} + n^{2k-2} (2k)_2 a_1^2 s_{2k-2} + \dots + n a_1^{2k}}{[1 + (n-1)^{2k-1}](n-1)}}.$$

Dans le cas spécial où $k=1$, on aura les limites

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{n s_2 - s_1^2}{n-1}}$$

et

$$-\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n} \sqrt{\frac{n s_2 - s_1^2}{n-1}},$$

qui, si au lieu de s_1 on écrit a_1 et $a_1^2 - 2a_2$ au lieu de s_2 , prennent les formes connues

$$-\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n} \sqrt{a_1^2 - \frac{2na_2}{n-1}}$$

et

$$-\frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n} \sqrt{a_1^2 - \frac{2na_2}{n-1}}.$$

NOTE. — L'auteur a publié une autre méthode élémentaire qui aboutit aux mêmes limites, dans des Comptes rendus (*Sitzungsberichte*) de la Société royale des Sciences, à Prague, en 1897.