

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 17
(1898), p. 576-579

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__576_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 929.

(1869, p. 192.)

NOTE

Par LA REDACTION.

Il s'agit d'une série qui exprime le nombre $\frac{2}{\pi}$; la question était attribuée à Catalan. Dans la *N. C. M.*, 1876, p. 272. celui-ci a fait connaître que la formule en question est due à M. Bauer (*J. de Crelle*, t. 56, p. 110).

Question 1716.

(1896, p. 103.)

On considère une série de coniques semblables qui ont même corde normale NN' (N et N' sont des points fixes). Chercher l'enveloppe de ces coniques et le lieu de l'extrémité de la corde de courbure au point N.

(CL. SERVAIS.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Rappelons d'abord les formules générales suivantes.

Soit la conique d'équation

$$(1) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Si l'on pose

$$F_1 = \frac{AE^2 + CD^2 - 2BDE + F(B^2 - AC)}{AC - B^2},$$

et si α^2 et β^2 sont les carrés des demi-axes de la conique (1), on a

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{(A + C)F_1}{AC - B^2},$$

$$(3) \quad \alpha^2 \beta^2 = \frac{F_1^2}{AC - B^2}.$$

Si les coniques (1) sont toujours semblables, on peut poser $\alpha = \beta k$. Alors (2) et (3) deviennent

$$\beta^2(1 + k^2) = -\frac{(A + C)F_1}{AC - B^2},$$

$$\beta^4 k^2 = \frac{F_1^2}{AC - B^2}.$$

D'où, en éliminant β^2 ,

$$(4) \quad \frac{(1 + k^2)^2}{k^2} = \frac{(A + C)^2}{AC - B^2},$$

Prenons des axes de coordonnées rectangulaires, l'origine en N, la tangente en N étant l'axe des x , et la normale NN' l'axe des y . En posant $NN' = a$, l'équation de la conique de l'énoncé est

$$(5) \quad Ax^2 + 2Bxy - y^2 + ay = 0.$$

En posant $\frac{(1 + k^2)^2}{k^2} = \frac{1}{m}$, l'équation (4) devient pour la conique (5),

$$(6) \quad B^2 + A + m(A - 1)^2 = 0.$$

1° *Enveloppe des coniques* (5). — En portant la valeur B déduite de (5) dans (6), on obtient une équation du second degré en A. En exprimant que les deux racines de cette équation en A sont égales, on trouve la quartique

$$(7) \quad m(x^2 + y^2)^2 - a(1 - 2m)x^2y - 2amy^3 + a^2my^2 = 0.$$

2° *Lieu de l'extrémité de la corde de courbure en N.* — N étant le point où la conique est normale à NN', si

$$y - px = 0$$

représente l'équation de la corde de courbure, l'équation du cercle osculateur en N est de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy - y^2 + ay + \lambda y(y - px) = 0,$$

avec les conditions

$$\lambda = \lambda - 1, \quad 2B = \lambda \mu.$$

Par suite,

$$\lambda = \Lambda + 1, \quad \mu = \frac{2B}{\Lambda + 1}.$$

L'équation de la corde de courbure est donc

$$(8) \quad y = \frac{2B}{\Lambda + 1} x.$$

On aura le lieu de l'extrémité de cette corde de courbure en éliminant A et B en éliminant (5), (6) et (8). De (5) et (8) on tire A et B que l'on porte dans (6). On trouve ainsi que le lieu est la sextique

$$(9) \quad \begin{cases} 4mx^2(x^2 + y^2 + ay)^2 + y^2(x^2 + y^2 - ay)^2 \\ - 4ax^3y(x^2 + y^2) = 0. \end{cases}$$

Remarque. — I. Si $k = 1$, alors $m = \frac{1}{4}$. Les équations (7) et (9) deviennent respectivement

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 - ay)^2 &= 0, \\ (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - ay)^2 &= 0. \end{aligned}$$

En effet, dans ce cas, les coniques (5) se réduisent toutes au cercle

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

décrit sur NN' comme diamètre.

II. On trouverait aisément les questions suivantes, qui découlent des propriétés énoncées :

1° Parmi les ellipses (5), trouver celle dont le rayon de courbure en N est minimum;

2° Parmi les ellipses (5), trouver celle dont l'aire est minima;

3° Le lieu du centre des coniques (5) est une quartique;

4° Le lieu du point de contact des coniques (5) avec les tangentes parallèles à NN' est une quartique;

5° Le lieu du point de contact des coniques (5) avec la tangente perpendiculaire à NN' est une quartique.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. CL. SERVAIS.

Soit P un point quelconque, on mène NP et l'on élève au point N sur cette droite une perpendiculaire qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec la droite $N'P$ au point P' . Ce point est le correspondant du point P dans la transformation quadratique de deuxième espèce ⁽¹⁾. Donc lorsque P décrit une droite (D) le point P' décrit une conique (C) normale à la droite NN' au point N et passant par N' . Sur NN' , comme diamètre, décrivons un cercle; ce cercle correspond à la droite de l'infini; soient R et S les points réels ou imaginaires, où la droite (D) rencontre ce cercle; $N'R$ et $N'S$ seront parallèles aux asymptotes de (C) . Si les coniques (C) sont semblables, l'angle $RN'S$ est constant et l'enveloppe de (D) est un cercle ω concentrique au cercle NN' . Par conséquent, l'enveloppe de toutes les coniques est la transformée du cercle ω ou une quartique circulaire ayant N pour point de rebroussement, N' pour point double et la droite de l'infini pour tangente double. La tangente au point N est perpendiculaire à NN' , et les tangentes au point double N' sont les droites qui joignent N' aux points de rencontre de la perpendiculaire à NN' au point N avec le cercle ω . N est donc un nœud dans le cas des ellipses et un point isolé dans le cas des hyperboles.

Du point N abaissons sur (D) une perpendiculaire rencontrant cette droite au point H , et le cercle NN' en un point I appartenant à (C) , comme étant le correspondant à l'infini de la droite (D) . La droite IN' est l'intersection du cercle NN' avec (C) , donc elle est parallèle à la corde de courbure au point N ⁽²⁾. L'extrémité de cette corde est donc le point H' correspondant du point H . Mais H décrit un limaçon de Pascal vu que la droite RS est tangente au cercle ω ; donc H' décrit la transformée quadratique de deuxième espèce de cette courbe.

La méthode employée a donné la construction, point par point, des courbes cherchées; elle donne aussi la construction des tangentes à ces courbes.

(1) Voir *Mathesis*, t. VII, p. 188.

(2) *Id.*, t. VIII, p. 33.