

D. SINTSOF

Sur les dérivées d'une fonction algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 17
(1898), p. 411-413

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__411_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[C1b]

SUR LES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION ALGÈBRIQUE;

PAR M. D. SINTSOF,

Professeur agrégé à l'Université de Kasan.

Soit y une fonction algébrique déterminée par l'équation irréductible

$$(1) \quad y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_{n-1} y + p_n = 0,$$

dont les coefficients p_i sont des fonctions rationnelles de la variable indépendante x .

Nous aurons alors facilement

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{1}{\Delta} (\alpha_{10} + \alpha_{11} y + \dots + \alpha_{1,n-1} y^{n-1}),$$

Δ étant la discriminante de (1) par rapport à y .

De même

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \Delta^{-2} (\alpha_{20} + \alpha_{21} y + \dots + \alpha_{2,n-1} y^{n-1}),$$

et, en général,

$$(3) \quad \frac{d^p y}{dx^p} = \Delta^{-p} (\alpha_{p0} + \alpha_{p1} y + \dots + \alpha_{p,n-1} y^{n-1}),$$

Or je veux montrer que les fonctions rationnelles α_{ik} peuvent être exprimées explicitement à l'aide des p_i et de leurs dérivées successives.

En effet, employant le même artifice à l'aide duquel M. Raffy ⁽¹⁾ a démontré les formules de M. Liouville, je multiplie (2) par Δy^k et forme la somme des expressions pareilles pour $y = y_1, y_2, \dots, y_n$, les y_i étant les racines différentes de (1).

Nous aurons

$$(4) \quad \frac{1}{k+1} \Delta s'_{k+1} = \alpha_{10} s_k + \alpha_{11} s_{k+1} + \dots + \alpha_{1,n-1} s_{k+n-1},$$

si l'on désigne $s_k = \Sigma y_i^k$ la somme des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de (1).

Si l'on donne à k les valeurs 0, 1, ..., $n-1$, on obtient n équations, qui, résolues par rapport à α_{1i} , en donnent la valeur sous forme de déterminant

$$(5) \quad \alpha_{1i} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} & s'_1 & s_{i+1} & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_i & \frac{1}{2} s'_2 & s_{i+2} & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{n+i-2} & \frac{1}{n} s'_n & s_{n+i} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

De même, l'équation (3), multipliée par $\Delta^p y^k$, nous donne, à l'aide de l'égalité

$$y^k y^{(p+1)} = \frac{d}{dx} (y^k y^{(p)}) - k y^{k-1} y' y^{(p)}$$

la relation suivante

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha_{p+1,0} s_k + \alpha_{p+1,1} s_{k+1} + \dots + \alpha_{p+1,n-1} s_{k+n-1} \\ &= \Delta^{p+1} \left[\frac{d}{dx} (\alpha_{p,0} s_k + \alpha_{p,1} s_{k+1} + \dots + \alpha_{p,n-1} s_{k+n-1}) \right] \\ & \quad - \Delta \left(\alpha_{p,0} s'_k + \frac{k}{k+1} \alpha_{p,1} s'_{k+1} + \dots + \frac{k}{k+n-1} \alpha_{p,n-1} s'_{k+n-1} \right). \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Sur les quadratures algébriques et logarithmiques (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. II. p. 184-206; 1883).

En donnant à k les valeurs, 0, 1, 2, $n-1$ nous obtenons n équations qui déterminent les $\alpha_{p+1,i}$ à l'aide des s_j , s'_j et les $\alpha_{p,k}$. Si donc les $\alpha_{p,k}$ sont connus nous aurons $\alpha_{p+1,j}$. Mais nous avons déterminé les $\alpha_{1,k}$: donc (6) nous donnera les $\alpha_{2,k}$, et ainsi de suite.

On peut remarquer que pour $p = 1$ l'expression (6) se simplifie ; notamment le premier membre de la seconde partie contient sous le signe de différentiation la quantité $\frac{1}{k+1} s'_{k+1}$; quant au second membre, il se présente sous forme d'un déterminant.

Mais je n'insiste plus sur ces détails (*).