

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 17
(1898), p. 385-387

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__385_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1663.

(1894, p. 54)

Si deux variables imaginaires z et z' sont reliées par la relation homographique

$$z = \frac{az' + b}{cz' + d},$$

dans laquelle a, b, c, d sont des quantités imaginaires et si l'une des variables z' décrit une courbe C' , la variable z décrit une courbe C qui est superposable à l'une des transformées par rayons vecteurs réciproques de la courbe C' .

Si la courbe C' n'est autre que l'axe des x , la courbe C est, par suite, un cercle.

(E. AMIGUES).

SOLUTION

Par M. J. DESTOUX.

De la relation

$$z = \frac{az' + b}{cz' + d},$$

on tire

$$(1) \quad \left(z - \frac{a}{c}\right) \left(z' + \frac{d}{c}\right) = \frac{bc - ad}{c^2}.$$

Posons

$$z - \frac{a}{c} = \rho e^{i\varphi}, \quad z' + \frac{d}{c} = \rho' e^{i\varphi'}, \quad \frac{bc - ad}{c^2} = r e^{i\varphi},$$

on a

$$\rho \rho' e^{i(\varphi + \varphi')} = r e^{i\varphi},$$

d'où

$$\rho\rho' = r, \quad \theta + \theta' = \varphi.$$

Ces égalités montrent que, si l'on prend le point $-\frac{d}{c}$ pour pôle d'inversion, il existe une transformée par rayons vecteurs réciproques de C' qui est superposable à C . On opérera cette superposition en faisant glisser la courbe C parallèlement à elle-même, de manière que le point $\frac{a}{c}$, considéré comme invariablement lié à C , parcourt la droite $(cz - a) = (a - d)t$, et vienne coïncider avec $-\frac{d}{c}$; on fera ensuite tourner la courbe C autour de $-\frac{d}{c}$ de l'angle $-\varphi$ dans son plan, et de 180° autour de la parallèle à Ox menée par $-\frac{d}{c}$ et choisie comme axe.

De ce qui précède, il résulte que lorsque z' parcourt une ligne droite quelconque du plan, en particulier l'axe des x , le point z parcourt un cercle.

Question 1667.

(1891, p. 387.

Un point M parcourt une ellipse de foyers F et F'. Le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux cercles de diamètres FF' et FM est une conique ayant un foyer au centre de l'ellipse. (BARIËN.)

SOLUTION

par M. H. LIZ.

Soient x', y' les coordonnées du point M pris sur l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$$

celles du milieu de FM seront

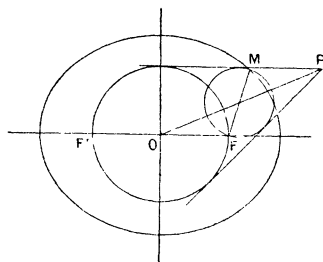
$$x = \frac{c + x'}{2}, \quad y = \frac{y'}{2},$$

et le cercle décrit sur FM, comme diamètre, sera représenté

par

$$\left(x - \frac{c + x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a - ex'}{2}\right)^2,$$

puisque $FM = (a - ex')$.



Or, le cercle décrit sur FF' , comme diamètre, ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

le point de rencontre P des tangentes extérieures sera déterminé par

$$x = \frac{c(c + x')}{2c + ex' - a}, \quad y = \frac{y'c}{2c + ex' - a}.$$

De ces expressions, on tire

$$y' = \frac{y}{x} (c + x'), \quad y'c = y(2c + ex' - a),$$

et celles-ci donnent à leur tour

$$x' = \frac{(2c - a)x - c^2}{c - ex}, \quad y' = \frac{y(2c - a - ex)}{c - ex}.$$

Portant ces valeurs dans la relation

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2,$$

on trouvera, pour le lieu du point P , la conique Σ

$$x^2[(a - c)^2 - 4c^2] + 4c^2(a + c)x + y^2(a - c)^2 - c^2(a + c)^2 = 0.$$

Mettant cette équation sous la forme

$$(x^2 + y^2)(a - c)^2 = c^2[2x - (a + c)]^2,$$

on voit facilement que la conique Σ a pour foyer le centre de l'ellipse et pour directrice correspondante

$$2x = a + c.$$