

L. RIPERT

Sur la discussion de l'équation des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 17
(1898), p. 329-331

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__329_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'1 a]

SUR LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION DES CONIQUES;

PAR M. L. RIPERT,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

Le Tableau par lequel on résume ordinairement la discussion de l'équation générale

$$(1) \quad AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DXT + 2EYT + FT^2 = 0$$

ne donne que l'espèce de la conique; mais l'examen de l'équation donne d'autres résultats. Nous posons

$$\begin{aligned} h &= ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2, & a &= CF - E^2, \\ b &= DE - BF, & \dots, & e &= BD - AE, & f &= AC - B^2. \end{aligned}$$

THÉORÈME I. — *L'espèce d'une courbe du deuxième ordre donnée par l'équation (1) et sa situation tant par rapport à la droite de l'infini qu'à l'origine, sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :*

$f > 0.$	$\left\{ \begin{array}{l} Ah > 0 \\ h = 0 \\ Ah < 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ellipse imaginaire.} \\ \text{Point réel d'intersection de} \\ \text{deux droites imaginaires.} \\ \text{Ellipse réelle.} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'origine est, pour :} \\ AF < 0, \text{ intérieure;} \\ F = 0, \text{ sur la courbe;} \\ AF > 0, \text{ extérieure.} \\ \text{Les coordonnées du} \\ \text{centre sont :} \\ x = d, y = e, t = f. \\ \text{L'équation de la po-} \\ \text{laire de l'origine est :} \\ DX + EY + FT = 0. \end{array} \right.$
$f < 0.$	$\left\{ \begin{array}{l} h \neq 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hyperbole.} \\ \text{Deux droites réelles se cou-} \\ \text{pant en un point fini.} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{se coupant en un} \\ \text{point réel de la droite} \\ \text{de l'infini.} \end{array} \right.$
$f = 0.$	$\left\{ \begin{array}{l} h \neq 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Parabole.} \\ \left\{ \begin{array}{l} a \text{ ou } c > 0 \\ a = c = 0 \\ a \text{ ou } c < 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{Deux parallèles} \\ \text{imaginaires} \\ \text{Deux parallèles} \\ \text{confondues} \\ \text{Deux parallèles} \\ \text{réelles et distinctes} \end{array} \right. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{se coupant en un} \\ \text{point réel de la droite} \\ \text{de l'infini.} \end{array} \right.$

De ce théorème on passe immédiatement, par corrélation, au théorème suivant :

THÉORÈME II. — *La situation, tant par rapport à l'origine qu'à la droite de l'infini et l'espèce d'une courbe de deuxième classe donnée par l'équation*

$$(2) \quad AU^2 + 2BUV + CV^2 + 2DUR + 2EVR + FR^2 = 0$$

sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :

$f < 0$.	$\left\{ \begin{array}{l} Ah > 0 \\ h = 0 \\ Ah < 0 \end{array} \right\}$	Conique imaginaire.	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Conique réelle de jonction de} \\ \text{deux points imaginaires.} \\ \text{Conique réelle.} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'espèce de la co-} \\ \text{nique est, pour :} \\ AF < 0, \text{ ellipse;} \\ F = 0, \text{ parabole;} \\ AF > 0, \text{ hyperbole.} \\ \text{Les coord. de la po-} \\ \text{laire de l'origine sont :} \\ u = d, \ v = e, \ r = f. \\ \text{L'équation du centre} \\ \text{est :} \\ DU + EV + FR = 0. \end{array} \right\}$
Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (intérieure) deux tangentes imaginaires.				
$f < 0$.				
Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (extérieure) deux tangentes réelles et distinctes.	$\left\{ \begin{array}{l} h < 0 \\ h = 0 \\ h \neq 0 \end{array} \right\}$	Conique réelle.	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Deux points réels sur droite} \\ \text{de jonction finie.} \\ \text{Conique réelle.} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sur droite de jon-} \\ \text{ction réelle passant} \\ \text{par l'origine.} \end{array} \right\}$
$f < 0$.				
Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (sur la courbe) deux tangentes confondues.				
$f < 0$.	$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ ou } c > 0 \\ h = 0 \\ a - c = 0 \\ a \text{ ou } c < 0 \end{array} \right\}$	Deux points imaginaires	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Deux points con-} \\ \text{fondus} \\ \text{Deux points réels} \\ \text{et distincts} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{sur droite de jon-} \\ \text{ction réelle passant} \\ \text{par l'origine.} \end{array} \right\}$
Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (sur la courbe) deux tangentes confondues.				
$f < 0$.				

On peut ajouter d'autres détails, tous corrélatifs.

Supposons maintenant que X, Y, T soient des coordonnées *trilinéaires normales*, X = 0, Y = 0, T = 0 étant les équations des côtés a_1, a_2, a_3 du triangle de référence $A_1 A_2 A_3$. Il est alors facile de voir que :

L'équation (1) représente une conique ne coupant pas, touchant ou coupant le côté a_3 , selon que l'on a $f \gtrless 0$. La conique est imaginaire si l'on a $f > 0$, $Ah > 0$ (ou encore $f = h = 0$, a ou $c > 0$); elle est réelle dans tous les autres cas. Le point ($f > 0$, $h = 0$) n'est pas sur a_3 , non plus que le point commun aux droites

($f < 0, h = 0$); les droites ($f = h = 0$) se coupent sur a_3 . Le sommet A_3 est intérieur ou extérieur, selon que l'on a $AF \lesseqgtr 0$. Les coordonnées du pôle de a_3 sont d, e, f ; l'équation de la polaire de A_3 est

$$DX + EY + FT = 0.$$

Résultats analogues pour les couples (a_1, A_1) et (a_2, A_2) .

La conique est ellipse, parabole ou hyperbole, selon que l'on a

$$\varphi = a_1^2 a + 2 a_1 a_2 b + a_2^2 c + 2 a_1 a_3 d + 2 a_2 a_3 e + a_3^2 f \gtrless 0.$$

Les coordonnées du centre sont $\varphi'_{a_1}, \varphi'_{a_2}, \varphi'_{a_3}$.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer, par passage direct de l'équation (1) à l'équation (2), les résultats corrélatifs.