

GIACOMO CANDIDO

Conséquence d'un théorème sur les congruences pseudosphériques

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 17
(1898), p. 275-277

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__275_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1898, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[05m]

**CONSÉQUENCE D'UN THÉORÈME SUR LES CONGRUENCES
PSEUDOSPHÉRIQUES;**

PAR M. GIACOMO CANDIDO, à Pise.

M. le professeur L. Bianchi, dans ses *Lezioni di Geometria differenziale* (p. 269), démontre le théorème

(¹) Voir DARBOUX, *Leçons sur la theorie des surfaces*, t. IV, p. 469.

suivant : *L'élément linéaire sphérique rapporté aux lignes (u, v) , images des surfaces principales d'une congruence pseudosphérique, prend la forme*

$$(\alpha) \quad ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

où le produit $\sqrt{EG}$ est une solution de l'équation de Liouville

$$(\beta) \quad \frac{\partial^2 \log \sqrt{EG}}{\partial u \partial v} = \cos \omega \sqrt{EG} \quad (\omega = \text{const.});$$

et inversement : *chaque fois que l'élément linéaire sphérique est réduit à la forme (α) où la relation (β) soit satisfaite, il existe une congruence pseudosphérique correspondante.*

Cela posé, l'équation (β) résolue donne

$$\sqrt{EG} = \frac{f'(u) \varphi'(v)}{\cos \omega [f(u) - \varphi(v)]^2},$$

et nous pouvons écrire aussi

$$(1) \quad \sqrt{EG} du dv = \frac{\cos \omega}{2} \left[\frac{f(u)}{\sqrt{f'(u) \varphi'(v)}} - \frac{\varphi(v)}{\sqrt{f'(u) \varphi'(v)}} \right]^2.$$

Cet élément superficiel peut appartenir à une infinité de surfaces qui sont données par l'élément linéaire que nous construisons par le moyen du même élément superficiel. Il y a plus : ayant fixé un élément linéaire, en raison du caractère arbitraire des fonctions $f(u)$, $\varphi(v)$, nous pourrions obtenir d'autres surfaces, et comme conclusion nous pouvons dire : *Il existe une infinité de surfaces qui admettent une représentation sur la sphère de manière à conserver à la fois l'orthogonalité d'un système de lignes (u, v) et aussi les aires.*

Application. — Parmi les surfaces en nombre infini auxquelles appartient l'élément superficiel donné par le

second membre de (1), il y a aussi les surfaces dont l'élément linéaire est donné par

$$(2) \quad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\frac{\cos \omega}{2} \left[\frac{f(u) + \varphi(v)}{\sqrt{f'(u)\varphi'(v)}} \right]^2}.$$

Parmi les surfaces qui ont cet élément linéaire, nous pouvons spécifier deux classes, car *la famille de surfaces précédemment indiquée contient des hélicoïdes ou des surfaces de révolution.*

En effet, supposons que l'on ait

$$f(u) = u^m, \quad \varphi(v) = v^m;$$

alors l'élément linéaire (2) devient

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\frac{\cos \omega}{2} \left(\frac{u^{\frac{m+1}{2}}}{m v^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{v^{\frac{m+1}{2}}}{m u^{\frac{m-1}{2}}} \right)^2}.$$

Alors aussi E et G de l'élément linéaire de la surface sont des fonctions homogènes de degré -2 , et, se rappelant un théorème de M. Darboux (vol. III, p. 73; § 614) on arrive à la conclusion énoncée.