NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEMINIANO PIRONDINI

Projection orthogonale sur une surface de révolution

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 246-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__246_1>

[O6aα]

PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION;

Par M. Geminiano PIRONDINI,
Professeur à l'Institut technique, à Parme.

I.

Soient Σ une surface de révolution dont l'axe est sur l'axe des z, L une ligne quelconque et Λ la projection orthogonale de L sur la surface Σ. Si

$$A[x(t), y(t), z(t)], \quad A_1[\xi(u), \eta(u), \zeta(u)]$$

sont deux points correspondants des lignes L, Λ, les équations

$$(1)\quad (x-\xi)\frac{d\xi}{du}+(y-\eta)\frac{d\eta}{du}+(z-\zeta)\frac{d\zeta}{du}=0, \quad x\eta-y\xi=0$$

expriment évidemment que la droite AA_1 est normale à Σ. En posant

$$(2)\qquad \xi=\rho\cos u, \qquad \eta=\rho\sin u, \qquad \zeta=U,$$

les conditions (1) deviennent

$$(3)\qquad \sqrt{x^2+y^2}\,\rho'=\rho\rho'+UU'-zU'; \qquad \tang u=\frac{y}{x}.$$

Si la ligne méridienne de Σ est représentée par l'équation

$$(4)\qquad \zeta_0=\Phi(\xi_0).$$

la première équation (3) est à remplacer par l'autre :

$$(5)\qquad z\Phi'(\rho)+\sqrt{x^2+y^2}=\rho+\Phi(\rho)\,\Phi'(\rho).$$

Quand la surface Σ et la ligne L sont données d'avance, on peut eliminer un des paramètres t, u entre la deuxième équation (3) et l'équation (5). On obtient ainsi ρ en fonction de u ou de t respectivement, ce qui [en vertu des équations (2)] équivaut à la détermination de A.

Quand la ligne L est placée sur le plan $z=0$ et que

$$(6)\qquad R=f(u)$$

est son équation polaire, la détermination de A est ramenée à la résolution de l'équation

$$(7)\qquad f(u)=\rho+\Phi(\rho)\,\Phi'(\rho)$$

par rapport à ρ.

Exemples. — 1° Si Σ est un cône de révolution dont θ est le demi-angle au sommet, pour la détermination de Λ il suffit de faire

$$\rho = (z \cos\theta + \sqrt{x^2 + y^2} \sin\theta) \sin\theta \qquad \sin u = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

dans les équations (2).

En supposant

$$z = \alpha\sqrt{x^2+y^2} - \beta, \qquad R = f(u) = me^{nu},$$

on trouve

$$\rho = m(\alpha \cos\theta + \sin\theta) \sin\theta e^{mu} + \beta \sin\theta \cos\theta$$

On a donc ce théorème :

Si une hélice cylindro-conique, placée sur le cône de révolution Σ', est projetée sur un autre cône Σ ayant le même axe que Σ', on obtient une ligne Λ dont la projection équatoriale est une conchoïde (1) *d'une spirale logarithmique par rapport au pôle de cette courbe.*

Quand les cônes Σ, Σ' ont le même sommet ($\beta = 0$), la ligne Λ est elle-même une hélice cylindro-conique.

2° Si la méridienne de Σ est la courbe de troisième ordre

$$\zeta_0 = \sqrt{m\xi_0^3 - n\xi_0^2 + p\xi_0 + q}$$

et si L est la ligne plane (6), on a

$$3m\rho^2 + 2(n-1)\rho - p - 2f(u) = 0,$$

d'où il suit

$$\rho = -\frac{n-1}{3m} \pm \frac{1}{3m}\sqrt{(n+1)^2 - 3mp + 6mf(u)}$$

et la détermination de Λ n'offre aucune difficulté.

---

(1) On appelle *conchoïde* d'une courbe C par rapport au point A la courbe C' qu'on obtient en augmentant d'une quantité constante les rayons vecteurs de la ligne C issus du point A.

En supposant successivement $m = 0$; $m = 0$, $n = 0$; $m = 0$, $p = 0$, on arrive à des théorèmes qui sont contenus dans ceux du § III.

II.

Si la ligne méridienne de la surface S engendrée par la rotation de L autour de l'axe des z est représentée par l'équation

$$z_0 = F(x_0),$$

on a

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R, \qquad z = F(R),$$

et la condition (5) donne

$$(8) \qquad \rho - R + [\Phi(\rho) - F(R)]\,\Phi'(\rho) = 0.$$

Si, au contraire, les lignes méridiennes des surfaces Σ, S sont représentées par les équations

$$\xi_0 = \Psi(\zeta_0), \qquad x_0 = P(z_0),$$

la première condition (3) donne

$$(9) \qquad \zeta - z + [\Psi(\zeta) - P(z)]\,\Psi'(\zeta) = 0.$$

Il s'ensuit que *les rayons vecteurs* R, ρ *sont liés par une relation finie et les hauteurs correspondantes* z, ζ *sont liées par une autre relation finie. Ces relations dépendent seulement de la nature des surfaces* Σ, S.

Si, par exemple, Σ est un cône ayant son sommet à l'origine $[\Phi(\xi_0) = \alpha\xi_0]$ et si S est un paraboloïde

$$\left[F(x_0) = \frac{x_0^2}{a}\right],$$

les relations dont on vient de parler sont

$$R + \frac{\alpha}{a} R^2 = (1 + \alpha^2)\rho; \qquad z + \frac{1}{\alpha}\sqrt{az} = \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\zeta.$$

Quand on donne d'avance la relation

$$(10) \qquad R = \Lambda(\rho)$$

entre les rayons vecteurs R, ρ, ou bien la relation

$$z = \mathrm{L}(\zeta) \tag{11}$$

entre les hauteurs z, ζ, les équations (8), (9) peuvent s'écrire

$$\mathrm{F}[\Lambda(\rho)] = \Phi(\rho) + \frac{\rho - \Lambda(\rho)}{\Phi'(\rho)}, \tag{12}$$

$$\mathrm{P}[\mathrm{L}(\zeta)] = \Psi(\zeta) + \frac{\zeta - \mathrm{L}(\zeta)}{\Psi'(\zeta)}, \tag{13}$$

et l'on peut déterminer Σ ou S quand on donne respectivement S ou Σ.

Dans le premier cas, la détermination de la méridienne de Σ est ramenée à l'intégration d'une des équations différentielles (12), (13).

Dans le deuxième cas, après avoir remplacé ρ dans le deuxième membre de l'équation (12), ou ζ dans le deuxième membre de l'équation (13) par les valeurs qu'on déduit des équations (10), (11), on obtient

$$\mathrm{F} = \mu(\mathrm{R}), \qquad \mathrm{P} = \nu(z),$$

μ, ν désignant deux fonctions connues. D'après cela, la méridienne de S est la courbe représentée par une des équations

$$z_0 = \mu(x_0), \qquad x_0 = \nu(z_0).$$

Exemples. — 1° Si S est un cône $[\mathrm{F}(x_0) = \alpha x_0 + \beta]$ et R, ρ sont liés par la relation

$$\mathrm{R} = \Lambda(\rho) = \rho + a,$$

la méridienne de Σ est la courbe

$$\log\left(\alpha\xi_0 - \zeta_0 + a\alpha + \beta - \frac{a}{\alpha}\right) - \frac{\alpha}{a}(\alpha\xi_0 - \zeta_0 + a\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2}{a}\xi_0 = c,$$

c étant une constante arbitraire.

2° Si la méridienne de Σ est la parabole $\xi_0 = \frac{\zeta_0^2}{m}$ et

z, ζ sont liés par la relation

$$z = \mathrm{L}(\zeta) = \sqrt{a\zeta\xi},$$

la méridienne de S est la ligne du cinquième ordre

$$x_0 = \frac{z_0^4}{a^2 m} + \frac{m(z_0 - a)}{2 z_0}.$$

L'équation (7) démontre que : *Lorsque la ligne* L *est tracée sur le plan coordonné* $z = 0$, *les rayons vecteurs* R, ρ *sont liés par la relation*

$$\mathrm{R} = \rho + \Phi(\rho)\,\Phi'(\rho).$$

Il s'ensuit que, si l'on connaît d'avance la relation (10) entre R, ρ, on a

$$\Phi^2(\rho) = 2\int \Lambda(\rho)\,d\rho - \rho^2 + c,$$

c étant une constante arbitraire.

Dans ce cas, *la ligne méridienne de* Σ *est représentée par l'équation*

$$\zeta_0 = \sqrt{2\int \Lambda(\xi_0)\,d\xi_0 - \xi_0^2 + c}$$

Si, par exemple, $\mathrm{R} = \Lambda(\rho) = a\rho^m$, la méridienne de Σ est la ligne

$$\zeta_0^2 = \frac{2a}{m+1}\,\xi_0^{m+1} - \xi_0^2 + c.$$

Pour $m = 1$, L est une ligne homothétique à la projection équatoriale de Λ, et Σ est une surface du deuxième ordre à centre (*voir* le § IV).

III.

Quand les rayons vecteurs R, ρ sont liés par la relation (10) et les hauteurs z, ζ par la relation (11), la première condition (3) donne

$$\mathrm{U}\mathrm{U}' + \rho\rho' - \mathrm{U}'\mathrm{L}(\mathrm{U}) - \rho'\Lambda(\rho) = 0. \tag{14}$$

Il s'ensuit que : *La méridienne de la surface Σ est la courbe représentée par l'équation*

$$(15)\qquad \zeta_0^2 + \xi_0^2 - 2\int L(\zeta_0)\, d\zeta_0 - 2\int \Lambda(\xi_0)\, d\xi_0 = c,$$

c étant une constante arbitraire.

Si l'on donne la surface Σ et la relation (11), l'équation (14) démontre que les rayons vecteurs R, ρ sont liés par la relation

$$\Lambda(\rho) = R = \rho + \Phi(\rho)\Phi'(\rho) - \Phi'(\rho) L[\Phi(\rho)].$$

Si, au contraire, on donne Σ et la relation (10), l'équation (14) peut s'écrire

$$(16)\qquad L[\Phi(\rho)] = \Phi(\rho) + \frac{\rho - \Lambda(\rho)}{\Phi'(\rho)}.$$

Et puisque, en résolvant l'équation

$$\Phi = \Phi(\rho),$$

par rapport à ρ, le deuxième membre de l'équation (16) se réduit à une fonction connue $\theta(\Phi)$ de Φ, on voit que les hauteurs z, ζ sont liées par la relation

$$z = \theta(\zeta).$$

Supposons que les rayons vecteurs R, ρ soient liés par la relation

$$(17)\qquad R = m\rho + n,$$

et les hauteurs z, ζ par l'autre relation

$$(18)\qquad z = k\zeta + h.$$

L'équation (15) démontre que la ligne méridienne de Σ est la conique

$$(19)\qquad (1-k)\zeta_0^2 + (1-m)\xi_0^2 - 2h\zeta_0 - 2n\xi_0 = c.$$

Si l'on suppose, au contraire, que la ligne méridienne de Σ soit la conique

$$(20) \qquad A\zeta_0^2 + B\xi_0^2 + 2C\zeta_0 + 2D\xi_0 + E = 0,$$

et qu'il subsiste la relation (17), ou bien l'autre (18), les considérations qu'on vient d'exposer conduisent au théorème suivant :

Si, dans la projection orthogonale d'une ligne L *sur une surface de révolution* Σ, *on énonce les trois conditions :* 1° *Les hauteurs* z, ζ *sont liées par une relation linéaire* (18); 2° *les rayons vecteurs* R, ρ *des projections équatoriales des lignes* L, Λ *sont liés par une relation linéaire* (17); 3° *la ligne méridienne de* Σ *est la conique représentée par l'équation* (20), *les coefficients* A, B, C, D *vérifiant les conditions*

$$(21) \qquad Ah + C(1-k) = 0, \qquad Bn + D(1-m) = 0,$$

deux de ces conditions entraînent nécessairement la troisième. La ligne L, *dans la rotation autour de l'axe des* z, *engendre une surface dont la courbe méridienne est la conique*

$$\frac{A}{k^2}(z_0 - h)^2 - \frac{B}{m^2}(x_0 - n)^2 + \frac{2C}{k}(z_0 - h) + \frac{2D}{m}(x_0 - n) + E = 0.$$

Cas particuliers. — Dans l'équation (20) supposons successivement

$$h = 0, \quad n = 0; \quad h = 0, \quad m = 1;$$
$$k = 1, \quad n = 0; \quad k = 1, \quad m = 1,$$

et comparons ensuite les équations qu'on va obtenir à l'équation (20). On a respectivement :

$$C = 0, \quad D = 0; \quad B = 0, \quad C = 0;$$
$$A = 0, \quad D = 0; \quad A = 0, \quad B = 0,$$

ce qui démontre que les conditions (21) sont vérifiées par identité.

On a donc les théorèmes :

Si, dans la projection orthogonale d'une ligne L *sur une surface de révolution* Σ, *on énonce les conditions :*

A. 1° *Les hauteurs* z, ζ *sont proportionnelles;* 2° *les projections équatoriales des lignes* L, Λ *sont deux courbes homothétiques par rapport à l'origine;* 3° *la surface* Σ *est du deuxième ordre à centre;*

B. 1° *Les hauteurs* z, ζ *sont proportionnelles;* 2° *une des projections équatoriales des lignes* L, Λ *est une conchoïde de l'autre par rapport à l'origine;* 3° *la surface* Σ *a pour méridienne une parabole ayant son axe sur l'axe des* x;

C. 1° *Les hauteurs* z, ζ *ont une différence constante;* 2° *les projections équatoriales des lignes* L, Λ *sont deux lignes homothétiques par rapport à l'origine;* 3° *la surface* Σ *est un paraboloïde;*

D. 1° *Les hauteurs* z, ζ *ont une différence constante;* 2° *une des projections équatoriales des lignes* L, Λ *est une conchoïde de l'autre par rapport à l'origine;* 3° *la surface* Σ *est un cône;*

Deux conditions de A, B, C, D *entraînent nécessairement la troisième. La ligne* L, *tournant autour de l'axe des* z, *engendre une surface* S *de la même nature que* Σ.

En appliquant les théorèmes précédents (A, C), on en déduit la proposition suivante :

Quand les lignes L, Λ *sont placées sur deux plans parallèles entre eux et parallèles à l'axe des* z :

1° *Si les hauteurs* z, ζ *sont proportionnelles,* Σ *et* S *sont deux surfaces du deuxième ordre à centre* (L *et* Λ *sont deux ellipses ou deux hyperboles*); *et* vice versa;

2° *Si les hauteurs* z, ζ *ont une différence constante,* *les surfaces* Σ, S *sont deux paraboloïdes* (L *et* Λ *sont deux paraboles*) ; *et* vice versa.

IV.

Si, dans la première équation (3), on suppose successivement : $z = k\zeta = k\mathrm{U}$, $z = 0$, on obtient après l'intégration

$$\zeta_p = \frac{1}{\sqrt{1-k}}\sqrt{2\int \mathrm{R}\rho'\,du - \rho^2 + m},$$

$$\zeta = \sqrt{2\int \mathrm{R}\rho'\,du - \rho^2 - n},$$

m, n étant des constantes arbitraires. En supposant $m = n$, on a cet énoncé :

Lorsque les hauteurs z, ζ *sont proportionnelles* ($z = k\zeta$), *si une ligne* L_p *et sa projection équatoriale* L_0 *sont projetées sur les surfaces* Σ_p, Σ *suivant les lignes* Λ_p, Λ *ayant la même projection équatoriale* Λ_0, *on a entre les hauteurs* ζ_p, ζ *la relation*

$$\zeta_p = \frac{1}{\sqrt{1-k}}\zeta.$$

En vertu de ce théorème, à chaque propriété relative au cas où z, ζ sont proportionnelles, correspond une autre propriété relative au cas où L est sur le plan $z = 0$; et *vice versa*.

Par exemple, les propriétés A et B du § III conduisent au théorème que voici :

Quand la ligne primitive L *est sur le plan* $z = 0$:

1° *Si cette ligne est homothétique à la projection équatoriale de* Λ, Σ *est une surface de deuxième ordre à centre; et* vice versa (*voir* le dernier théorème du § II);

2° *Si cette ligne est une conchoïde de la projection* *équatoriale de* Λ, Σ *a pour méridienne une parabole ayant l'axe sur l'axe des* x; *et* vice versa.

Le premier de ces théorèmes conduit à la propriété suivante : *Quand la ligne primitive* L *est une droite du plan* $z = 0$ *et que* Λ *est sur un plan parallèle à l'axe des* z *et à la droite* L, Σ *est une surface du deuxième ordre à centre* (Λ *est une ellipse ou une hyperbole*); *et* vice versa.

En considérant les lignes Λ, L définies par les équations

$$\xi = \rho\cos u, \qquad \eta = \rho\sin u, \qquad \zeta = U;$$
$$x = R\cos u, \qquad y = R\sin u, \qquad z = z(u),$$

et les lignes Λ_1, L_1 définies par les autres équations

$$\xi_1 = \rho_1\cos u = (\rho + k)\cos u, \qquad \eta_1 = \rho_1\sin u = (\rho + k)\sin u,$$
$$\zeta_1 = U,$$
$$x_1 = R_1\cos u = (R + k)\cos u, \qquad y_1 = R_1\sin u = (R + k)\sin u,$$
$$z_1 = z(u),$$

on trouve que les conditions

$$R\rho' = \rho\rho' + UU' - zU', \qquad R_1\rho'_1 = \rho_1\rho'_1 + UU' - zU'$$

reviennent l'une à l'autre. On a donc ce théorème :

Si l'on augmente les rayons vecteurs des projections équatoriales des deux lignes Λ, L *d'une même quantité constante* k, *sans altérer les hauteurs* ζ, z, *on obtient deux nouvelles lignes* Λ_1, L_1 *telles que, si* Λ *est la projection orthogonale de* L *sur la surface* Σ *engendrée par la rotation de* Λ *autour de l'axe des* z, Λ_1 *est la projection orthogonale de* L_1 *sur la surface* Σ_1 *engendrée par la rotation de* Λ_1.

Ce théorème conduit souvent à des résultats importants. Si, par exemple, on a recours au dernier théorème du § III et au dernier théorème du § IV, on a cette proposition :

Quand les projections équatoriales des lignes Λ, L *sont deux conchoïdes de* Nicomède *ayant leurs pôles à l'origine et leurs bases rectilignes parallèles entre elles :*

1° *Si les hauteurs* z, ζ *sont proportionnelles, les surfaces* Σ, S *ont pour méridiennes deux coniques à centres; et* vice versa;

2° *Si les hauteurs* z, ζ *ont une différence constante, les surfaces* Σ, S *ont pour méridiennes deux paraboles dont les axes sont parallèles à l'axe des* z; *et* vice versa.

Quand la ligne primitive L (*placée sur le plan* $z=0$) *et la projection équatoriale de* Λ *sont deux conchoïdes de* Nicomède *ayant leurs pôles à l'origine et leurs bases rectilignes parallèles entre elles, la surface* Σ *a pour méridienne une conique à centre; et* vice versa.

V.

Admettons que les projections équatoriales L_0, Λ_0 des lignes L, Λ soient deux courbes semblables (ou égales), placées de façon que deux points homologues dans la similitude soient aussi correspondants dans la projection. On doit avoir

$$(22) \qquad x = a + k(\xi\cos\varepsilon - \eta\sin\varepsilon), \quad y = b + k(\xi\sin\varepsilon + \eta\cos\varepsilon).$$

a, b, k, ε étant des constantes; et les conditions fondamentales (1) donnent les équations

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & z = \zeta - \frac{(k\cos\varepsilon - 1)(\xi\xi' + \eta\eta') - k\sin\varepsilon(\xi'\eta - \xi\eta') + a\xi' + b\eta}{\zeta'}, \\ & k\sin\varepsilon(\xi^2 + \eta^2) - a\eta + b\xi = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où, par l'application des égalités (22), on dérive

$$(24)\quad \begin{cases} k^2(z\zeta' - \zeta\zeta') = (1 - k\cos\varepsilon)(xx' - yy') \\ \qquad\qquad + k\sin\varepsilon(x'y - xy') - ax' - by', \\ \sin\varepsilon(x^2 + y^2) - (a\sin\varepsilon - b\cos\varepsilon)x \\ \qquad\qquad - (a\cos\varepsilon + b\sin\varepsilon)y = 0. \end{cases}$$

Il suit que les lignes Λ, L sont sur deux cylindres circulaires Γ, G contenant l'axe des z.

Si l'on trace Λ sur le cylindre Γ d'une manière arbitraire, L est définie par les équations (22) et par la première équation (23). Si l'on part, au contraire, de la ligne L, la détermination de Λ exige l'intégration de la première équation (24).

Quand L est sur le plan $z = 0$, cette courbe est le cercle représenté par la deuxième équation (24) et la ligne Λ est définie par les égalités

$$\eta = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4k\sin\varepsilon(b\xi - k\sin\varepsilon\,\xi^2)}}{2k\sin\varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \zeta^2 &- 2a\xi + 2b\eta \\ &+ (k\cos\varepsilon - 1)(\xi^2 - \eta^2) - 2k\sin\varepsilon\int\left(\eta - \xi\frac{d\eta}{d\xi}\right)d\xi + m, \end{aligned}$$

m étant une constante arbitraire.

Supposons que la ligne primitive L et sa projection orthogonale Λ soient deux courbes semblables (ou égales), placées de façon que deux points homologues dans la similitude soient aussi correspondants dans la projection.

En supposant que L, Λ puissent être réduites à deux courbes homothétiques par rapport à l'origine, après une rotation ε autour de l'axe des z et une translation arbitraire, on a les équations (22) et cette autre :

$$(25)\qquad z = c + k\zeta,$$

c étant une constante. En éliminant z entre les équations (23), (25) et ζ entre les équations (24), (25), on obtient après l'intégration

$$\eta = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4k \sin\varepsilon (b\xi + k \sin\varepsilon \xi^2)}}{2k \sin\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}(1 - k)\zeta^2 - 2c\zeta \\ = 2a\xi + 2b\eta + (k\cos\varepsilon - 1)(\xi^2 + \eta^2) - 2k\sin\varepsilon \int \left(\eta - \xi \frac{d\eta}{d\xi}\right) d\xi + m,\end{aligned}$$

$$y = \left\{ \frac{a\cos\varepsilon + b\sin\varepsilon \pm \sqrt{(a\cos\varepsilon + b\sin\varepsilon)^2 - 4\sin\varepsilon[(b\cos\varepsilon - a\sin\varepsilon)x + \sin\varepsilon x^2]}}{2\sin\varepsilon} \right\},$$

$$\begin{aligned}(1 - k)z^2 - 2cz \\ = 2ax + 2by + (k\cos\varepsilon - 1)(x^2 + y^2) - 2k\sin\varepsilon \int \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) dx + n,\end{aligned}$$

m, n étant des constantes arbitraires.

Les lignes Λ, L sont donc, à une constante près, définies entièrement; les projections équatoriales de ces lignes sont deux cercles passant à l'origine des axes.

Remarque. — L'hypothèse $k = 1$ correspond à l'égalité des lignes L_0, Λ_0 ou de L, Λ.

VI.

Que les projections équatoriales L_0, Λ_0 des lignes L, Λ soient deux courbes semblables (ou égales), placées d'une façon quelconque, on peut passer de Λ_0 à L_0 après les opérations suivantes : la réduction des coordonnées dans un rapport constant (k); une rotation (ε) de la ligne dérivée autour d'un point arbitraire de son plan (l'origine); une translation convenable (a) de la courbe nouvelle L_1 suivant une certaine direction (l'axe des x).

Si A, B, C sont les points où Λ_0, L_1, L_0 sont coupées par un rayon vecteur quelconque, incliné de l'angle u sur l'axe des x et D est le point où L_0 est coupée par une droite parallèle à l'axe des x menée par B, on a

$$BD = a, \qquad OA = \rho = \varphi(u),$$

$$OB = \rho_1 = k\varphi(u+\varepsilon), \qquad \cot \widehat{DOA} = \cot u + \frac{a}{\rho_1 \sin u},$$

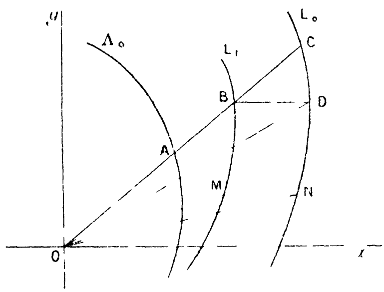
$$OD = \sqrt{\rho_1^2 + 2a\rho_1 \cos u + a^2}.$$

Si donc $u = \theta(\omega)$ est une solution de l'équation

$$(26) \qquad \cot u + \frac{a}{k\varphi(u+\varepsilon)\sin u} = \cot \omega,$$

on a

$$OD = \sqrt{k^2\varphi^2[\theta(\omega)+\varepsilon] + 2ak\varphi[\theta(\omega)+\varepsilon]\cos[\theta(\omega)] + a^2}.$$



En posant OC = R et en remarquant que u est l'angle polaire du point C, on a

$$(27) \qquad R = \sqrt{k^2\varphi^2[\theta(u)+\varepsilon] + 2ak\varphi[\theta(u)+\varepsilon]\cos[\theta(u)] + a^2}$$

et la détermination des lignes L, Λ et de la surface Σ n'offre aucune difficulté.

Quand L est sur le plan $z = 0$, (27) est son équation polaire et la ligne Λ est représentée par les équations

$$\xi = \varphi(u)\cos u,$$
$$\eta = \varphi(u)\sin u,$$
$$\zeta = \sqrt{2\int R\varphi'(u)\,du - \varphi^2(u)} + c$$

c étant une constante arbitraire.

Supposons que la ligne primitive L et sa projection orthogonale Λ soient deux courbes semblables (ou égales) placées d'une façon quelconque.

Ces lignes peuvent être réduites à deux courbes homothétiques par rapport à l'origine, après une rotation ε autour de l'axe des z (c'est un cas particulier) et une translation suivant une direction donnée, qu'on peut supposer parallèle au plan $y = 0$, sans nuire à la généralité.

Si, de plus, cette translation est décomposable, suivant Ox, Oz, en les translations a, b, on peut appliquer les formules de ce paragraphe. Dans la figure précédente A, M sont deux points des courbes Λ_0, L_0 choisis de façon que

$$\text{OA} = \rho, \qquad \text{OM} = k\rho.$$

Si du point M on mène une droite parallèle à l'axe des x, coupant L_0 au point N, on a

$$\cot \widehat{\text{NOX}} = \cot w = \cot(u + \varepsilon) + \frac{a}{k\rho.\sin(u+\varepsilon)}$$

et, conséquemment,

$$(28) \qquad w = \operatorname{arc\,cot} \left\{ \cot(u+\varepsilon) - \frac{a}{k\varphi(u).\sin(u+\varepsilon)} \right\}.$$

La hauteur de L en N s'obtient par la première équation (3), en remplaçant z et u par $z - b$ et w; la hauteur de Λ en A est $U(u)$. La condition exprimant que ces hauteurs ont le rapport constant k est donc

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\varphi(w) - \sqrt{k^2\varphi^2[\theta(w)+\varepsilon] + 2ak.\varphi[\theta(w)+\varepsilon].\cos[\theta(w)] + a}}{U'(w)} \\ &\times \varphi'(w) - U(w) + b = k.U(u), \end{aligned} \right.$$

w étant donnée par l'équation (28).

En résumé, on a $\rho = \varphi(u)$; R est donné par l'équation (27) et la forme de la fonction $U(u)$ doit être déterminée après l'équation (29).

VII.

Le lieu des projections d'un point fixe P ou d'une ligne fixe L sur une surface de révolution Σ, variable ou invariable, mobile dans l'espace suivant une loi quelconque est respectivement une ligne L_1 ou une surface S_1 jouissant de nombreuses propriétés. Nous nous bornerons ici à considérer le cas où Σ, invariable de forme, se déplace de façon à conserver son axe parallèle à une direction donnée.

Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point A d'une ligne A placée sur la surface Σ à l'instant initial sont données par les équations (2); les coordonnées x_1, y_1, z_1 du même point A à un autre instant quelconque sont

$$x_1 = \xi + \lambda(v), \qquad y_1 = \eta + \mu(v), \qquad z_1 = \zeta + \nu(v),$$

λ, μ, ν désignant des fonctions d'un paramètre v indépendant de u.

Si dans cette position le point $A(x_1, y_1, z_1)$ de Σ est correspondant au point $B(x, y, z)$ de la figure primitive F, on a pour conditions d'orthogonalité de la droite BA sur la surface Σ :

$$\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2} = \frac{\rho\rho'+UU'-(z-\nu)U'}{\rho'},$$

$$\tang u = \frac{y-\mu}{x-\lambda}.$$

Il s'ensuit que le lieu demandé est défini par les équations

$$x_1 = \frac{\rho(x-\lambda)}{\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}} + \lambda,$$

$$y_1 = \frac{\rho(y-\mu)}{\sqrt{(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2}} + \mu,$$

$$z_1 = U + \nu.$$

Dans le cas particulier dans lequel la surface Σ se déplace suivant l'axe, on peut faire $\lambda(\nu) = \mu(\nu) = 0$, $\nu(\nu) = \nu$, ce qui donne

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{\rho x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ y_1 &= \frac{\rho y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ z_1 &= z + \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}-\rho\right)\rho'}{U'}. \end{aligned}\right.$$

La figure primitive est un point P. — Puisqu'on peut supposer $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ sans nuire à la généralité, on en déduit

$$x_1 = \rho, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = \frac{a-\rho}{\Phi'(\rho)},$$

d'où, en éliminant ρ,

$$(31)\qquad z_1 = \frac{a-x_1}{\Phi'(x_1)}.$$

Telle est l'équation qui définit la ligne L_1, quand on donne le point P et la surface Σ.

Soit donnée *a priori* la ligne L_1 et soit

$$(32)\qquad z_1 = \Omega(x_1)$$

son équation. En comparant les égalités (31), (32), on a l'équation

$$(33)\qquad \Omega(x_1)\Phi'(x_1) + x_1 = a,$$

qu'on peut employer pour la détermination du point P, lorsque L_1 et Σ sont données d'avance.

On obtient par l'équation (33)

$$\Phi(x_1) = \int \frac{a-x_1}{\Omega(x_1)}\,dx_1;$$

il s'ensuit que, lorsque le point P et la ligne L_1 sont connus, la ligne méridienne de Σ est représentée par l'équation

$$(34) \qquad \zeta_0 = \int \frac{a - \xi_0}{\Omega(\xi_0)} d\xi_0.$$

Exemples. — 1° Quand la surface mobile Σ est un paraboloïde $\left[\zeta_0 = \Phi(\xi_0) = \frac{\xi_0^2}{k}\right]$ et la ligne L_1 est l'hyperbole équilatère

$$(35) \qquad z_1 x_1 = \alpha x_1 + \beta,$$

l'égalité (33) nous fournit les conditions

$$\frac{2\alpha}{k} - 1 = 0, \qquad a = \frac{2\beta}{k},$$

dont la deuxième fixe la position du point P.

2° Soient L_1 l'hyperbole équilatère (35) et $P(a, o, o)$ le point fixe.

L'équation (34) démontre que la surface Σ a pour méridienne la courbe

$$\zeta_0 = -\frac{1}{2\alpha}\xi_0^2 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha} + a\right)\xi_0 - \frac{\beta}{\alpha^2}\left(\frac{\beta}{\alpha} + a\right)\log(\alpha\xi_0 + \beta).$$

Parmi ces surfaces Σ il y a évidemment le paraboloïde

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} + a = 0\right).$$

VIII.

La figure primitive est une ligne L. — La détermination de la surface S_1, lorsque L et Σ sont données d'avance, se fait à l'aide des équations (30).

Si, par exemple, Σ est un paraboloïde $\left(U = \frac{\rho^2}{k}\right)$ et si L est la droite $x = a$, $z = o$, le lieu S_1 est la surface réglée du deuxième degré

$$2x_1 z_1 - k z_1 = ak.$$

Si la surface S_1 est donnée *a priori* et si

$$M(x_1, y_1, z_1) = 0$$

est son équation, on en déduit

$$(36) \qquad M\left[\frac{\rho x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\rho y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z + \frac{\sqrt{x^2+y^2}-\rho}{\Phi'(\rho)}\right] = 0.$$

Quand (Σ, S_1) ou bien (L, S_1) sont données d'avance, la détermination de L ou de Σ se fait en posant la condition que l'égalité (36) soit vérifiée quel que soit ρ, ou bien quelle que soit la valeur du paramètre t en fonction duquel on a exprimé x, y, z. Pour la possibilité du problème, on doit avoir :

Dans le premier cas, deux équations entre x, y, z; celles-ci définissent la ligne L.

Dans le deuxième cas, une seule équation entre ρ, ρ', U' ; l'intégration d'une telle équation résout le problème.

Exemples. — 1° La surface mobile Σ est un cône $[\zeta_0 = \Phi(\xi_0) = a\xi_0]$ et la surface S_1 un plan

$$(z_1 = \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma).$$

L'équation (36) donne

$$z - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} - \gamma = \left(\frac{1}{a} - \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\beta y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\rho,$$

et l'on a les conditions

$$z = \gamma - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a},$$

$$(a^2\alpha^2 - 1)x^2 + (a^2\beta^2 - 1)y^2 + 2a^2\alpha\beta\, xy = 0.$$

Celles-ci définissent la ligne L. Ces équations démontrent que : *La projection de L sur le plan $z = 0$ est une conique passant à l'origine des axes et la hauteur z est une fonction linéaire du rayon vecteur $\sqrt{x^2+y^2}$ d'une telle projection.*

2° L est une droite parallèle au plan $x=0$ et S_1 la surface représentée par l'équation

$$z_1 = \frac{\alpha y_1}{x_1} + \frac{(\beta x_1 + \gamma)\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{x_1}.$$

Comme on a $x = h$, $y = y$, $z = y \cot\theta$, l'équation (36) donne

$$\left(\cot\theta - \frac{\alpha}{h}\right) y - \left(\frac{\rho'}{U'} - \frac{\gamma}{h}\right)\sqrt{x^2 - y^2} - \rho\left(\frac{\rho'}{U'} + \beta\right) = 0.$$

On a donc les conditions

$$\cot\theta - \frac{\alpha}{h} = 0, \qquad \frac{\rho'}{U'} = \frac{\gamma}{h};$$

d'où, par intégration,

$$U = \frac{h}{\gamma}\rho = -\frac{1}{\beta}\rho.$$

Il suit de là

$$\alpha = h\cot\theta, \qquad \frac{\gamma}{\beta} = -h,$$

et la surface de révolution mobile Σ est un cône

$$\left(\zeta_0 = \frac{h}{\gamma}\xi_0\right).$$