

R. BLONDLLOT

Nouvelle démonstration du théorème de Stokes

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16
(1897), p. 501-504

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__501_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D3d]

NOUVELLE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE STOKES;

PAR M. R. BLONDLOT.

On donne communément le nom de *Théorème de Stokes* à la proposition qui exprime la transformation d'une intégrale prise le long d'un contour fermé sur une intégrale prise sur une surface limitée à ce contour. M. Ém. Picard fait toutefois remarquer avec raison que cette proposition était déjà connue d'Ampère, du moins dans des cas particuliers.

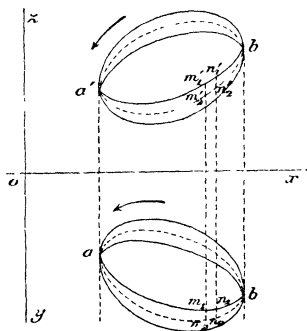
Il existe plusieurs démonstrations irréprochables de ce théorème; si je propose la suivante, c'est parce qu'elle me semble particulièrement simple et qu'on y voit l'intégrale superficielle naître, pour ainsi dire, de l'intégrale curviligne :

Étant donné un contour fermé quelconque C , qu'un mobile parcourt dans un sens choisi arbitrairement et

une surface quelconque S limitée à ce contour, nous appellerons *face positive de S* celle qui est telle qu'un personnage debout sur cette face, près du contour, voit le mobile qui parcourt C aller de sa droite vers sa gauche.

Soit P une fonction des coordonnées x, y, z supposées rectangulaires. Considérons l'intégrale $\int P dx$ prise dans le sens de la circulation du mobile, et étendue à tout le contour C . Nous nous proposons de transformer cette intégrale curviligne en une intégrale superficielle prise sur S .

Figurons les projections de C d'après les conventions de la Géométrie descriptive, en prenant le plan XOZ pour plan vertical, le plan XOY pour plan horizontal supposé rabattu sur le plan vertical.



Soit A le point de C le plus rapproché, et B le point de C le plus éloigné du plan YOZ . Par ces deux points, traçons sur S une ligne simple quelconque, puis imaginons que cette ligne se dédouble, de façon à former un contour fermé limité aux points A et B et toujours situé sur la surface S et que ce contour fermé s'ouvre progressivement de façon à venir finalement coïncider avec C .

Soient maintenant C_1 et C_2 deux états infiniment voisins du contour variable; nous allons évaluer la variation éprouvée par P lorsque le contour variable éprouve cette transformation infiniment petite. Pour cela, menons, parallèlement à YOZ , une série de plans infiniment rapprochés; à chaque élément M_1N_1 ainsi découpé sur C_1 correspond un élément M_2N_2 découpé sur C_2 et ayant la même projection dx . Lorsqu'on passe de C_1 à C_2 , un élément Pdx d'intégrale se transforme en un autre où dx est le même et où P seul a varié, à cause de la variation de y et de z du milieu de l'élément de contour; en appelant δx et δz ces variations, celle de P est

$$\frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z,$$

et celle de $\int P dx$ est

$$\int_{C_1} \frac{\partial P}{\partial y} \delta y dx + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z dx.$$

Mais $\delta y dx$ est la projection sur le plan xoy du quadrilatère infiniment petit $M_1M_2N_2N_1$; désignons cette projection par ω_z . De même, $\delta z dx$ est la projection prise en signe contraire du même quadrilatère sur le plan xoz ; désignons-la par ω_y . La variation précédente peut alors s'écrire

$$\int \frac{\partial P}{\partial y} \omega_z - \frac{\partial P}{\partial z} \omega_y;$$

elle est ainsi exprimée par une intégrale de surface s'étendant à tous les éléments de la bande infiniment étroite balayée par le contour variable.

Lorsque, maintenant, ce contour variable passera d'un état initial dans lequel il embrasse sur S une aire nulle à un état final dans lequel il coïncide avec C , la somme des variations éprouvées par $\int P dx$ sera préci-

sément la valeur de $\int_C P dx$, puisque, dans l'état initial considéré, l'intégrale est identiquement nulle. On a donc

$$\int_C P dx = \int_S \frac{\partial P}{\partial y} \omega_z - \frac{\partial P}{\partial z} \omega_y,$$

l'intégrale du second membre s'étendant à tous les éléments de toutes les bandes successivement balayées, c'est-à-dire à tous les éléments de S.

Remarquons que, cette dernière intégrale étant indépendante du mode de division de S en éléments infiniment petits, il s'ensuit que ω_y et ω_z peuvent être envisagées comme les projections d'un élément de surface de forme quelconque pris sur S.

Si l'on désigne par P, Q, R trois fonctions quelconques de xyz , on a, d'après ce qui précède,

$$\int_C P dx = \int_S \frac{\partial P}{\partial y} \omega_z - \frac{\partial P}{\partial z} \omega_y,$$

$$\int_C Q dy = \int_S \frac{\partial Q}{\partial z} \omega_x - \frac{\partial Q}{\partial x} \omega_z,$$

$$\int_C R dz = \int_S \frac{\partial R}{\partial x} \omega_y - \frac{\partial R}{\partial y} \omega_x.$$

En ajoutant membre à membre, il vient

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) \omega_x + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \omega_y \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \omega_z : \end{aligned}$$

c'est le théorème de Stokes; ω_x , ω_y , ω_z sont définis comme les produits de l'élément ω pris sur la surface S par les cosinus des angles formés par les sens positifs des trois axes avec la normale à S menée du côté de la face positive, définie par le sens de l'intégration le long du contour.