

LÉON AUTONNE

Sur les symboles $\frac{o}{o}$ à plusieurs variables indépendantes

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16
(1897), p. 420-426

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__420_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D1d]

SUR LES SYMBOLES $\frac{0}{0}$ A PLUSIEURS VARIABLES
INDÉPENDANTES;

PAR M. LÉON AUTONNE.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Soit X une fonction de x qui, pour $x=0$ par exemple, prend la forme $\frac{0}{0}$. Pour $|x|$ assez petit, on a $X \equiv P_1(x) : P_0(x)$ avec $P_1(0) = P_0(0) = 0$. On con-

vient que la valeur X_0 de X pour $x = 0$ est la limite vers laquelle tend X quand x tend vers zéro. Si P_1 et P_0 pour $|x|$ assez petit se développent en séries de Taylor, des règles bien connues donnent X_0 . Si X dépend de r variables distinctes $x, y, z, \dots$ avec

$$X \equiv \frac{P_1(x, y, z, \dots)}{P_0(x, y, z, \dots)} P_1(0, 0, \dots) = P_0(0, \dots) = 0,$$

on peut encore convenir que X_0 est la limite de X quand $|x|, |y|, |z|, \dots$ tendent vers zéro. Seulement X_0 n'est plus unique et change avec la loi de décroissance simultanée des modules. Si P_1 et P_0 sont régulières, on peut (Weierstrass) obtenir pour X_0 tout nombre pris arbitrairement à l'avance.

Mais considérons N fonctions $X_i = P_i : P_0, i = 1, 2, \dots, N, N \geq r$, avec $P_i(0, \dots) = P_0(0, \dots) = 0$. Les X_{i_0} ne sont plus *simultanément* arbitraires. Si l'on s'en donne quelques-unes, les autres s'en déduisent. Je pose alors le problème suivant :

Connaitre tous les systèmes de valeurs-limites vers lesquelles tendent simultanément les rapports des P , quand les r variables tendent vers zéro de toutes les façons.

Une terminologie géométrique est commode. Dans un espace E_N à N dimensions, prenons les $N + 1$ coordonnées homogènes ξ d'un point $\xi, j = 0, 1, 2, \dots, N$; considérons les $x, y, z, \dots$ comme les coordonnées d'un point ξ dans un E_r . ξ et ζ sont liées par les relations

$$\rho \xi_j = P_j(x, y, z), \quad \rho = \text{facteur de proportionnalité,} \\ P_j(0, 0, \dots) = 0.$$

Quand ζ tend vers le point $\omega [x = y = z = \dots = 0]$ suivant un certain itinéraire $\mathfrak{W}$, ξ tend vers une posi-

tion limite $\bar{\xi}$, de coordonnées $\bar{\xi}_j$, fournie par $\mathfrak{W}$. Le problème est alors de *construire la figure Ω_r de E_N , lieu des points $\bar{\xi}$, fournis par tous les itinéraires possibles.*

Grâce aux magistrales recherches de Weierstrass sur les séries entières à plusieurs variables, on peut parvenir au but ⁽¹⁾. La solution complète exige trop d'explications préliminaires pour être exposée ici; mais, dans le cas particulier ci-après, qui se laisse traiter d'une façon directe et très facile, on retrouve la méthode et les principales circonstances du procédé général.

II. — CONSTRUCTION D'UNE FIGURE Ω .

Soient, pour $N = r = 2$, $j = 0, 1, 2$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \xi_j = f_j(y) = c_j y^2 + 2 A_j y + B_j, \\ A_j = a_j x^\alpha + x^{\alpha+1}(\dots), \quad \alpha, \beta = \text{entiers}, \\ B_j = b_j x^\beta + x^{\beta+1}(\dots), \quad A_j, B_j = \text{holomorphes en } x; \\ \text{les neuf constantes } a_j, b_j, c_j \text{ sont } \textit{quelconques} \text{ sans aucune} \\ \text{relation particulière entre elles.} \end{array} \right.$$

Quand y varie seul, ξ décrit dans le plan E_2 une conique Γ , dont l'équation s'obtient en éliminant φ et y .

(¹) Le lecteur désireux d'approfondir la matière peut se reporter à mes autres publications.

Comptes rendus : Sur les variétés unicursales à deux dimensions (11 novembre 1895).

Sur les variétés unicursales à trois dimensions (9 et 30 décembre 1895).

Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes (18 janvier 1897).

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1896.

Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes.

Acta mathematica : Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes (à paraître).

Posons, l_j, m_j, n_j étant neuf quantités quelconques,

$$\begin{vmatrix} l_0 & l_1 & l_2 \\ m_0 & m_1 & m_2 \\ n_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = (lmn), \quad \dots$$

le meilleur procédé d'élimination (CLEBSCH, *Leçons sur la Géométrie*, traduction A. Benoist, t. III, p. 292) est d'annuler le discriminant $P(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ du polynome quadratique en y

$$U(y) = \left(\xi f \frac{\partial f}{\partial y} \right) = y^2(\xi A c) + y(\xi B c) + (\xi B A),$$

d'où l'équation de Γ

$$P = (\xi B c)^2 - 4(\xi A c)(\xi B A) = 0.$$

Sous le bénéfice de $P = 0$, l'équation $U(y) = 0$ a une racine double y , $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, d'où

$$(1) \quad -y = \frac{(\xi B c)}{2(\xi A c)} = \frac{y(\xi B A)}{(\xi B c)} = \left[\frac{(\xi B A)}{(\xi A c)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pour chaque valeur de x et de y , ξ est donné par l'intersection de la conique Γ avec une des droites (1). Quand x est infiniment petit, ξ tend vers un certain point de la courbe $\bar{\Gamma}$ limite de Γ . La figure Ω_2 est située tout entière sur la courbe Γ .

Démontrons la réciproque : un point quelconque μ , de coordonnées μ_1 , de $\bar{\Gamma}$ est sur Ω_2 .

Supposons μ déterminé par l'intersection de $\bar{\Gamma}$ avec la droite q , $q_0 \xi_1 - q_1 \xi_0 = 0$, $q_1 : q_0 = \mu_1 : \mu_0 =$ quelconque. Soit λ un point où q coupe Γ ; l'équation $P(\lambda) = 0$ exprime qu'il existe au moins une racine η commune aux deux équations

$$\frac{f_0(y)}{\lambda_0} = \frac{f_1(y)}{\lambda_1} = \frac{f_2(y)}{\lambda_2}$$

ou aux trois équations

$$[ij], \quad \lambda_i f_j(y) - \lambda_j f_i(y) = 0, \quad i, j = 0, 1, 2,$$

savoir

$$(\lambda_i c_j - \lambda_j c_i) y^2 + (\lambda_i A_j - \lambda_j A_i) y + \lambda_i B_j - \lambda_j B_i = 0.$$

Pour x infiniment petit, le point λ étant distinct du point c , les deux racines de $[ij]$ sont infiniment petites et η est sûrement infiniment petit. x et η s'annulent à la fois.

Cela posé, construisons un itinéraire $\mathfrak{W}$ qui fournisse μ . Prenons $y = \eta(\lambda, x)$. x variant, λ varie, mais sans pouvoir quitter ni la conique Γ ni la droite q . À la limite, λ , qui coïncide avec ξ , vient sur $\bar{\Gamma}$ sans avoir pu quitter q ; donc λ ou ξ vient en μ . c. q. f. d.

Bref, Ω_2 est la conique $\bar{\Gamma}$.

On a

$$\begin{aligned} (\xi Bc) &= x^\beta (\xi bc) + x^{\beta+1}(\dots), \\ (\xi Ac) &= x^\alpha (\xi ac) + x^{\alpha+1}(\dots), \\ (\xi Ab) &= x^{\alpha+\beta} (\xi ab) + x^{\alpha+\beta+1}(\dots). \end{aligned}$$

Pour obtenir $\bar{\Gamma}$, il suffit de chercher la limite de la conique, après départ du facteur x^β ,

$$(2) \quad x^\beta (\xi bc)^2 - 4x^{2\alpha} (\xi ac)(\xi ab) = 0.$$

Pour y , il vient

$$(3) \quad y = x^{\beta-\alpha} \left[-\frac{(\xi bc)}{2(\xi ac)} + x(\dots) \right].$$

$$(4) \quad = x^\alpha \left[-\frac{2(\xi ba)}{(\xi bc)} + x(\dots) \right].$$

$$(5) \quad = x^{\frac{1}{2}\beta} \left\{ \left[\frac{(\xi ba)}{(\xi ac)} \right]^{\frac{1}{2}} + x(\dots) \right\}.$$

formules qui permettent, un point $\bar{\xi}$ étant pris sur $\bar{\Gamma}$, de construire un itinéraire fournissant $\bar{\xi}$.

Remarque. — On a expressément exclu de la démonstration précédente le cas où le point μ coïncide avec le point c , de coordonnées c_j . Mais il est très facile de construire un $\mathfrak{W}$ qui fournisse c . Posons $x = y^\sigma$, avec $2 < 1 + \sigma\alpha$ et $2 < \sigma\beta$; alors dans f_j tous les termes sont négligeables devant le terme $c_j y^2$. Il suffit donc de choisir l'exposant positif σ assez grand pour que l'itinéraire $\mathfrak{W}$, $x = y^\sigma$, fournisse c .

On construira par un raisonnement analogue des $\mathfrak{W}$ fournissant les points a et b .

III. — DISCUSSION.

$\beta = 2\alpha$. — $\bar{\Gamma}$ est la conique

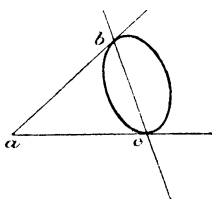
$$(\xi bc)^2 + 4(\xi ac)(\xi ab) = 0,$$

y est fourni par une quelconque des relations (3), (4) ou (5).

$\beta < 2\alpha$. — $\bar{\Gamma}$ est la droite double

$$(\xi bc)^2 = 0,$$

Fig. 1.



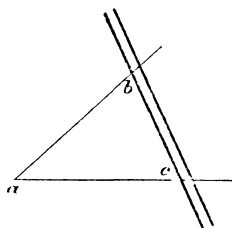
y est fourni par la relation (5).

(426)

$\beta > 2\alpha$. — $\bar{\Gamma}$ est la droite

$$(\xi ab) = 0,$$

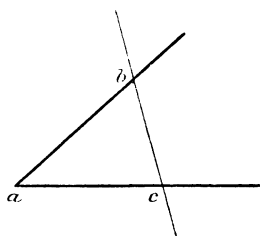
Fig. 2.



γ est fourni par (3);

$$(\xi ac) = 0,$$

Fig. 3.



γ est fourni par (4).