

AUTONNE

Sur un certain jacobien

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16
(1897), p. 376-379

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__376_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[C3]

SUR UN CERTAIN JACOBIEN;

PAR M. AUTONNE.

Soient

$$A = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad b_{00} = \frac{\partial A}{\partial a_{00}}, \quad \dots$$

et les relations ($i, j = 1, 2, \dots, n$)

$$(o) \quad y_i = A_i A_0^{-1}, \quad A_i = a_{i0} + \sum_j a_{ij} x_j, \quad A_0 = a_{00} + \sum_j a_{0j} x_j.$$

A titre d'exercice sur le calcul des déterminants, je me propose de déterminer le jacobien

$$Y = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

La différentiation du système (o) fournit immédiatement

$$A_0^2 \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = A_0 a_{ij} - A_i a_{0j} = p_{ij}.$$

Le déterminant à n^2 éléments P des p_{ij} se compose d'une suite de déterminants constitués de la façon suivante : on remplace dans b_{00} , dans α colonnes, les éléments a par les éléments $A_0 a_{ij}$; dans $n - \alpha$ colonnes, les éléments a par les éléments $-A_i a_{0j}$. Tous les déterminants à quatre éléments

$$\begin{vmatrix} A_i a_{0j} & A_i a_{0j'} \\ A_{i'} a_{0j} & A_{i'} a_{0j'} \end{vmatrix}$$

sont nuls; donc il suffira de prendre $n - \alpha = 0$ ou 1 et $\alpha = n$ ou $n - 1$. Bref

$$P = A_0^n b_{00} - A_0^{n-1} \sum_j Q_j a_{0j},$$

$$Q_j = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & A_i & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Dans Q_j retranchons de la $j^{\text{ème}}$ colonne les éléments des autres, multipliés respectivement par $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$. Il ne restera de A_i que $a_{ij}x_j + a_{i0}$.

$$Q_j = x_j \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} \sigma_{i0} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est b_{00} ; le second, faisant venir la $j^{\text{ième}}$ colonne au premier rang par $j-1$ dérangements d'indices, est

$$(-1)^{j-2} \begin{vmatrix} \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{i0} a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Le coefficient de $(-1)^{j-1}$ est $(-1)^j b_{0j}$; bref

$$Q_j = b_{00} x_j - b_{0j}, \quad \sum_j a_{0j} Q_j = b_{00} (\Lambda_0 - a_{00}) - (\Lambda - a_{00} b_{00}).$$

$$\sum_j a_{0j} Q_j = \Lambda_2 b_{00} - \Lambda,$$

$$P = \Lambda_0^n b_{00} - \Lambda_0^{n-1} (\Lambda_0 b_{00} - \Lambda) = \Lambda_0^{n-1} \Lambda;$$

enfin

$$Y = \frac{\Lambda}{\Lambda_0^{n+1}}, \text{ expression homogène de degré zéro} \\ \text{par rapport aux } \alpha.$$

Résolvons les équations (o) par rapport aux x :

$$x_j = \frac{B_j}{B_0}; \quad B_j = b_{0j} + \sum_i b_{ij} y_i; \quad B_0 = b_{00} + \sum_i b_{i0} y_i.$$

Il viendra

$$X = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \frac{B}{B_0^{n+1}}; \quad B = \Lambda^n,$$

B étant le déterminant des b (système adjoint des a).

Remplaçons dans B_0 les y par leur expression en x . Il viendra

$$\frac{b_{00} \Lambda_0 + \sum_i b_{i0} \left(\sum_j a_{ij} x_j + a_{i0} \right)}{\Lambda_0} \\ = \frac{b_{00} \Lambda_0 - b_{00} \sum_j x_j a_{0j} + \Lambda - a_{00} b_{00}}{\Lambda_0} = \frac{\Lambda}{\Lambda_0}.$$

Alors

$$X = \frac{B}{B_0^{n+1}} = A^n \left(\frac{A_0}{A} \right)^{n+1} = \frac{A_0^{n+1}}{A}.$$

$XY = 1$, ce qui devait être.