

A. DE SAINT-GERMAIN

Note sur les déplacements d'une figure invariable

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16
(1897), p. 319-322

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__319_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[08b]

NOTE SUR LES DÉPLACEMENTS D'UNE FIGURE INVARIABLE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Je me propose d'indiquer une méthode simple et uniforme pour démontrer le théorème fondamental sur les déplacements finis d'une figure dans un plan ou d'un solide dans l'espace : elle repose sur une considération analogue à celle dont se sert M. Kœnigs pour établir le caractère du déplacement élémentaire d'un solide. J'ajouterai quelques remarques se rapportant à l'une des propriétés caractéristiques de l'hélice.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'amener une figure plane F d'une position donnée à un autre dans son

plan : il suffit, comme on sait, d'amener deux de ses points dans la position qu'ils doivent occuper. Prenons arbitrairement le premier de ces points et soient A, B ses positions initiale et finale dans le plan fixe : pour second point, je choisis celui qui se trouve d'abord en B et qui doit venir en un point C toujours bien déterminé : les droites AB, BC sont nécessairement égales. Soit O le centre de la circonférence passant par les points A, B, C : il est clair qu'en faisant tourner le triangle OAB autour du centre O, on peut l'amener en coïncidence avec son égal OBC, entraînant la figure à déplacer. Si les points A, B, C étaient en ligne droite, ce serait par une translation AB qu'on pourrait réaliser le déplacement donné de F.

Un raisonnement analogue montrerait qu'une rotation suffit pour imprimer un déplacement donné à une figure sur une sphère.

Supposons maintenant qu'on veuille donner un déplacement déterminé à un solide S : soient dans l'espace A, B les positions que doit prendre successivement un de ses points choisi arbitrairement ; le point qui se trouve d'abord en B devra venir en un point C qu'on doit regarder comme connu ; de même le point situé d'abord en C occupera une position D quand S sera dans sa seconde position. Il suffirait d'amener les trois points considérés des positions A, B, C en B, C, D pour donner à S le déplacement voulu. Il y a nécessairement égalité entre les droites AB, BC, CD, comme entre les angles ABC, BCD. Soient PQ la perpendiculaire commune aux bissectrices BB', CC' de ces angles et *pabcd* la projection de la figure PQABCD sur un plan normal à PQ en son milieu. Les angles *pbc*, *pcb* sont égaux comme mesurant des dièdres homologues dans les trièdres BPC*b*, CQB*c* dont les faces sont res-

pectivement égales; donc pb est égal à pc . D'autre part, PB étant perpendiculaire au milieu de AC, pb l'est au milieu de ac , pa est égal à pc et les projections de BA et de BC sur la direction de PQ sont égales; la projection de CD aura aussi la même grandeur et pb est égal à pd . De ce qui précède, il résulte que les points A, B, C, D sont situés sur un cylindre de révolution autour de PQ et même sur une hélice tracée sur ce cylindre: il suffit de faire glisser le long de cette courbe les trois points considérés pour qu'ils passent de A, B, C en B, C, D, entraînant S dans leur mouvement hélicoïdal. Par les points A, B, C, D on pourrait faire passer une infinité d'hélices, mais on se borne à celle dont l'arc AB est moindre qu'une spire. Si les quatre points étaient en ligne droite, on pourrait obtenir le déplacement de S en le faisant glisser le long de AB et tourner autour de cette droite: c'est toujours un mouvement hélicoïdal.

Outre les trois points situés primitivement en A, B, C, nous en pourrions prendre dans S une série d'autres, choisis d'une manière analogue: celui qui, d'abord situé en D, doit passer en un point déterminé E, celui qui part de E et ainsi de suite; on formerait une ligne brisée qui, de la position ABCDE...G passerait en BCDE...GH. Non seulement les côtés et les angles doivent être égaux, mais aussi les dièdres BCAD, CDBE, ...; une telle ligne peut être appelée *ligne brisée régulière gauche à torsion constante*. On voit aisément que les droites CB, CD, les plans CBA, CDE, enfin les bissectrices BB', DD' sont symétriques par rapport à CC'; la perpendiculaire commune à CC' et à DD' est dans le prolongement de PQ, et l'hélice que nous avons vue passer par A, B, C, D passe par E et, de proche en proche, par tous les sommets de la ligne bri-

sée. En supposant les côtés infiniment nombreux et infiniment petits, cette ligne deviendrait une courbe à courbure et à torsion constantes, qui ne différerait pas d'une hélice.

J'établirai enfin deux relations simples entre les éléments de la figure PQABCD. Soient M le milieu de BC, a la longueur MC, $180^\circ - 2\alpha$ l'angle BCD, 2β le dièdre BCAD, θ l'angle de BC avec PQ, R le rayon du cylindre contenant les points A, B, C, D. Si, dans le plan BCD, je mène à MC une perpendiculaire MO qui rencontre CC' au point O, j'aurai

$$MO = a \cot \alpha, \quad CO = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Supposons PQ vertical et projetons sur un plan vertical, parallèle à BC : MC se projette en vraie grandeur suivant $m'c'$; la bissectrice CQO a sa projection $c'q'o'$ horizontale ; enfin, la projection $m'o'$ de MO est perpendiculaire sur $m'c'$. Le dièdre BCO m' , moitié de BCAD, a pour mesure l'angle de MO avec la perpendiculaire Mm' au plan vertical, et l'on a

$$m'o' = MO \sin \beta = a \cot \alpha \sin \beta;$$

or, dans le triangle $m'o'c'$, l'angle o' est égal à θ et $m'o'$ à $a \cot \theta$: on a donc

$$\cot \theta = \cot \alpha \sin \beta.$$

Quant à R ou CQ, son rapport avec CO est égal à celui de leurs projections et l'on a, sans difficulté,

$$R = CO \frac{c'q'}{c o'} = \frac{a}{\sin \alpha} \sin^2 \theta.$$

Si l'on passe au cas limite de l'hélice, les deux dernières formules conduisent aux deux relations bien connues

$$\cot \theta = \frac{\rho}{\tau}, \quad R = \rho \sin^2 \theta.$$