

N. SALTYKOW

**Sur les intégrales communes à plusieurs
problèmes sur l'équilibre d'un fil
flexible et inextensible**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16
(1897), p. 245-249

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__245_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R4b]

**SUR LES INTÉGRALES COMMUNES A PLUSIEURS PROBLÈMES
SUR L'ÉQUILIBRE D'UN FIL FLEXIBLE ET INEXTENSIBLE ;**

PAR M. N. SALTYKOW.

Soient X, Y, Z les composantes, suivant trois axes rectangulaires, de la force rapportée à l'unité de masse d'un fil flexible et inextensible ; x, y, z les coordonnées d'un élément ; k la densité ; T la tension, regardées comme fonctions de l'arc s du fil. Les équations différentielles de l'équilibre du fil sont

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + kX = 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + kY = 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + kZ = 0, \\ \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1. \end{array} \right.$$

I. Soient k une constante, X, Y, Z des fonctions de x, y, z , ou k une fonction de s, X, Y, Z dépendant de s, x, y, z .

S'il existe la condition

$$\frac{X}{x+a_1} + \frac{Y}{y+a_2} + \frac{Z}{z+a_3},$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes arbitraires, les équations (1) ont trois intégrales

$$T\left[(y+a_2)\frac{dx}{ds} - (x+a_1)\frac{dy}{ds}\right] = C_1,$$

$$T\left[(z+a_3)\frac{dx}{ds} - (x+a_1)\frac{dz}{ds}\right] = C_2,$$

$$\frac{z+a_3}{x+a_1} - \frac{(z+a_3)\frac{dx}{ds} - (x+a_1)\frac{dz}{ds}}{(y+a_2)\frac{dx}{ds} - (x+a_1)\frac{dy}{ds}} \frac{y+a_2}{x+a_1} = C_3,$$

C_1, C_2, C_3 sont des constantes arbitraires.

II. Soient k une constante, X, Y, Z des fonctions de x, y, z .

1. S'il existe la condition

$$\frac{(y+a_5)a_9 + (x+a_1)a_{10}}{\left\{ \begin{aligned} &[(z+a_2y+a_3)(y+a_5) + (a_6y+a_8)(x+a_1)]X \\ &- [(z+a_6x+a_7)(x+a_1) + (a_2x-a_4)(y+a_5)]Y \end{aligned} \right\}} \\ = \frac{(z+a_6x+a_7)a_9 + (a_4-a_2x)a_{10}}{\left\{ \begin{aligned} &[(z+a_2y+a_3)(z+a_6x+a_7) + (a_6y+a_8)(a_4-a_2x)]X \\ &- [(z+a_6x+a_7)(x+a_1) + (a_2x-a_4)(y+a_5)]Z \end{aligned} \right\}} = k,$$

$a_1, a_2, \dots, a_{10}$ étant des constantes arbitraires, les équations (1) admettent deux intégrales

$$T\left[(z+a_2y+a_3)\frac{dx}{ds} - (a_2x-a_4)\frac{dy}{ds} - (x+a_1)\frac{dz}{ds}\right] + a_9s = C_1,$$

$$T\left[(a_6y+a_8)\frac{dx}{ds} - (z+a_6x+a_7)\frac{dy}{ds} + (y+a_5)\frac{dz}{ds}\right] + a_{10}s = C_2.$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

En effet, on a

$$\begin{aligned} S_1 &= V_1 \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) - \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + U_1 = 0, \\ S_2 &= V_2 \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) - \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + U_2 = 0, \end{aligned}$$

relations où l'on a posé

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{(z + a_2 y + a_3)(y + a_5) + (a_6 y + a_8)(x + a_1)}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)}, \\ V_2 &= \frac{(z + a_2 y + a_3)(z + a_6 x + a_7) + (a_3 y + a_8)(a_4 - a_2 x)}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)}, \\ U_1 &= \frac{(y + a_5) a_9 + (x + a_1) a_{10}}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)}, \\ U_2 &= \frac{(z + a_6 x + a_7) a_9 + (a_4 - a_2 x) a_{10}}{(z + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(y + a_5)}. \end{aligned}$$

Il est évident que

$$\begin{aligned} (a_2 x - a_4) V_1 + (x + a_1) V_2 &= z + a_2 y + a_3, \\ (z + a_6 x + a_7) V_1 - (y + a_5) V_2 &= a_6 y + a_8, \\ (a_2 x - a_4) U_1 + (x + a_1) U_2 &= a_9, \\ (z + a_6 x + a_7) U_1 - (y + a_5) U_2 &= a_{10}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les premiers membres des équations

$$\begin{aligned} (a_2 x - a_4) S_1 + (x + a_1) S_2 &= 0, \\ (z + a_6 x + a_7) S_1 - (y + a_5) S_2 &= 0 \end{aligned}$$

sont des dérivées exactes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ T \left[(z + a_2 y + a_3) \frac{dx}{ds} - (a_2 x - a_4) \frac{dy}{ds} - (x + a_1) \frac{dz}{ds} \right] + a_9 s \right\}, \\ \frac{d}{ds} \left\{ T \left[(a_6 y + a_8) \frac{dx}{ds} - (z + a_6 x + a_7) \frac{dz}{ds} + (y + a_5) \frac{dy}{ds} \right] - a_{10} s \right\}. \end{aligned}$$

2. S'il existe la condition

$$\begin{aligned} k[a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4(yZ - zY) \\ + a_5(zX - xZ) + a_6(xY - yX)] = a_7, \end{aligned}$$

$a_1, a_2, \dots, a_7$ étant des constantes arbitraires, les équations (1) ont l'intégrale

$$\begin{aligned} T \left[a_1 \frac{dx}{ds} + a_2 \frac{dy}{ds} + a_3 \frac{dz}{ds} + a_4 \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) \right. \\ \left. + a_5 \left(z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} \right) + a_6 \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) \right] + a_7 s = C; \end{aligned}$$

C est une constante arbitraire.

III. — 1. S'il existe la condition

$$\frac{\begin{aligned} & (\gamma + a_5) \Psi_1(s) + (x + a_1) \Psi_2(s) \\ & \{ [(\gamma + a_2 \gamma + a_3)(\gamma + a_5) + (a_6 \gamma + a_8)(x + a_1)] X \\ & \quad - [(\gamma + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(\gamma + a_5)] Y \} \\ & = \frac{(\gamma + a_6 x + a_7) \Psi_1(s) + (a_4 - a_2 x) \Psi_2(s)}{\{ [(\gamma + a_2 \gamma + a_3)(\gamma + a_6 x + a_7) + (a_6 \gamma + a_8)(a_4 - a_2 x)] X \\ & \quad - [(\gamma + a_6 x + a_7)(x + a_1) + (a_2 x - a_4)(\gamma + a_5)] Z \} } = k, \end{aligned}}$$

$a_1, a_2, \dots, a_8$ étant des constantes arbitraires, Ψ_1, Ψ_2 des fonctions arbitraires, les équations (1) admettent deux intégrales

$$\begin{aligned} T \left[(\gamma + a_2 \gamma + a_3) \frac{dx}{ds} - (a_2 x + a_4) \frac{dy}{ds} - (x + a_1) \frac{dz}{ds} \right] + \int \Psi_1(s) ds = C_1, \\ T \left[(a_6 \gamma + a_8) \frac{dx}{ds} - (\gamma + a_6 x + a_7) \frac{dy}{ds} + (\gamma + a_5) \frac{dz}{ds} \right] + \int \Psi_2(s) ds = C_2, \end{aligned}$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

2. S'il existe la condition

$$\begin{aligned} k [a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4 (yZ - zY) \\ + a_5 (zX - xZ) - a_6 (xY - yX)] = \Psi(s), \end{aligned}$$

$a_1, a_2, \dots, a_6$ étant des constantes arbitraires, Ψ une

fonction arbitraire de s , les équations (1) ont l'intégrale

$$\begin{aligned} T \bigg[a_1 \frac{dx}{ds} + a_2 \frac{dy}{ds} + a_3 \frac{dz}{ds} \\ - a_4 \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) \\ + a_5 \left(z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} \right) \\ + a_6 \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) \bigg] + \int \Psi(s) ds = C; \end{aligned}$$

C est une constante arbitraire.

Ayant appliqué la théorie ⁽¹⁾ de M. Korkine pour résoudre le problème ⁽²⁾ de M. Bertrand sur les intégrales des équations (1), j'ai trouvé les cinq cas cités. Ils sont les seuls, quand il y a des intégrales communes à plusieurs problèmes sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible soumis à l'action d'une force, rapportée à l'unité de masse du fil et dont les composantes sur trois axes rectangulaires de coordonnées x, y, z sont des fonctions de x, y, z et de l'arc s .