G. GALLUCCI

Quelques théorèmes de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 13-18

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__13_1>

[K2e] [K16b]

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. G. GALLUCCI,

Élève de l'Université de Naples.

1. *Si* G *est le centre des moyennes distances des* n *points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *d'un cercle* O (*ou d'une sphère* O),

pour chaque point M *de la droite (ou du plan) qui passe par* O *perpendiculairement à* GA_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *on a*

$$(1)\qquad \overline{MA_i}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\overline{MA_1}^2 + \overline{MA_2}^2 + \ldots + \overline{MA_n}^2\right).$$

Si $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ..., $x_n y_n$ sont les coordonnées des points A_1, A_2, ..., A_n rapportés à un système d'axes rectangulaires, pour tous les points $M(x, y)$ qui vérifient la relation (1), on a

$$\begin{aligned} &n[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] \\ &\quad = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \ldots + (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2, \end{aligned}$$

et, après les réductions

$$\begin{aligned} &2x(nx_i - x_1 - \ldots - x_n) + 2y(ny_i - y_1 - y_1 - \ldots - y_n) \\ &\quad - (nx_i^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 + ny_i^2 - y_1^2 - \ldots - y_n^2) = 0. \end{aligned}$$

Le lieu du point M est donc une droite. Cette droite passe évidemment par O et elle est perpendiculaire à la droite GA_i qui joint les deux points $A_i(x_i, y_i)$ et

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right).$$

Par un calcul analogue on démontre le théorème dans l'espace.

Corollaire. — *Le cercle décrit sur* OG *comme diamètre coupe chaque droite* GA_i *en un point* P_i *dont le carré de la distance à* A_i *est moyenne arithmétique entre les carrés des distances aux autres* $n - 1$ *points.*

On peut aussi déduire ce corollaire d'un théorème très connu sur le cercle OG, qui est le lieu des points P dont la puissance, par rapport au cercle O, est

$$\frac{1}{n}\left(\overline{PA_1}^2 + \overline{PA_2}^2 + \ldots + \overline{PA_n}^2\right). \qquad \text{(Laisant.)}$$

2. *En particulier, si, dans un tétraèdre* ABCD, *on*

conduit par le centre O *de la sphère circonscrite le plan perpendiculaire à la médiane* AG *correspondant à la face* BCD, *pour chaque point* M *de ce plan, on a*

$$\overline{AM}^2 = \frac{1}{3}(\overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{DM}^2).$$

On peut démontrer directement ce théorème en faisant usage du lemme suivant : *Si* G′ *est le centre de gravité de la face* BCD *d'un tétraèdre* ABCD *on a*

$$(2)\quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = 3\overline{AG}^2 + \frac{1}{3}(\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2).$$

Il suffit d'appliquer cette formule aux tétraèdres OBCD, MBCD.

Pour le triangle plan, on a le théorème analogue qui se démontre très facilement.

3. De la formule (2) on peut aussi déduire aisément les deux théorèmes suivants :

1° *Les tétraèdres qui ont un sommet fixe, le même barycentre et la somme des carrés des arêtes qui aboutissent au sommet fixe constante, ont les centres des sphères circonscrites sur un plan fixe.*

2° *Les tétraèdres qui ont un sommet fixe* A *et les autres sommets* BCD *sur une sphère* O, *de manière que* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 =$ const., *ont leurs barycentres sur un plan fixe.*

Pour le triangle plan, on a

1° *Les triangles qui ont même barycentre, un sommet fixe et la somme des carrés des côtés qui y concourent constante ont les centres des cercles circonscrits sur une droite fixe.*

2° *Les triangles qui ont un sommet fixe* A *et les autres sommets* BC *sur un cercle* O, *de manière que*

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ *soit constant, ont leurs barycentres sur une droite fixe.*

Ce dernier théorème est la généralisation d'un théorème de Jamet (Question 137 du *Mathesis*).

4. Les théorèmes donnés précédemment pour le triangle plan peuvent s'étendre au triangle sphérique, avec les modifications convenables. Je me limite à donner les énoncés :

1° *Si dans un triangle sphérique* ABC *on conduit par le centre (sphérique)* O *du cercle circonscrit le grand cercle perpendiculaire à la médiane* $\overset{\frown}{AG}$ *correspondant au côté* $\overset{\frown}{BC}$, *pour chaque point* M *de ce grand cercle on a*

$$\cos MA = \tfrac{1}{2}(\cos MB + \cos MC).$$

2° *On considère tous les triangles sphériques* ABC *qui ont un sommet fixe et tels que*

$$\cos AB + \cos AC = \text{const};$$

si le milieu G *de* $\overset{\frown}{BC}$ *est fixe, le lieu du centre sphérique du cercle circonscrit est un grand cercle perpendiculaire* $\overset{\frown}{AG}$, *et si le centre sphérique du cercle circonscrit* O *est fixe, le lieu du milieu* M *de* $\overset{\frown}{BC}$ *est un grand cercle perpendiculaire* $\overset{\frown}{AO}$.

5. *Si dans un tétraèdre* ABCD *on conduit les plans* α_1, α_2, α_3, α_4 *perpendiculaires respectivement aux milieux des deux couples d'arêtes opposées* AB, CD; AC, DB, *les droites* $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_3\alpha_4$ *sont dans un plan perpendiculaire à la droite* MN *qui joint les milieux des deux autres arêtes.*

En effet, pour chaque point P de la droite $\alpha_1\alpha_2$, on a

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2; \qquad \overline{PB}^2 = \overline{PD}^2$$

ou bien

$$\overline{PA}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2,$$

et, par conséquent,

$$\overline{PM}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{BN}^2;$$

et de même pour chaque point de $\alpha_3\alpha_4$. Donc ces deux droites sont dans un plan qui est le plan antiradical (plan symétrique du plan radical par rapport au milieu de la centrale) des deux sphères décrites sur AD, BC comme diamètres. Ce plan passe par O, centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, et si l'on observe que l'orthocentre H est le symétrique de O par rapport au milieu de MN (barycentre), on a le théorème suivant :

Dans tout tétraèdre, les plans radicaux des trois couples de sphères décrites sur les trois couples d'arêtes opposées comme diamètres se coupent en un point H *qui est l'orthocentre du tétraèdre.*

En appliquant ce théorème, on trouve que si un tétraèdre est tel qu'il existe un point d'égale puissance par rapport aux six sphères décrites sur les arêtes comme diamètres, le tétraèdre est orthologique et le point est son orthocentre. La réciproque est presque évidente.

6. Des considérations analogues à celles du numéro précédent conduisent, pour le quadrangle plan, au théorème suivant :

Si A′, B′, C′, D′ *sont les centres des cercles circonscrits aux triangles* BCD, CDA, DAB, ABC *d'un quadrangle* ABCD, *les côtés du triangle diagonal du quadrangle*

$A'B'C'D'$ *sont perpendiculaires aux médianes du quadrangle* ABCD (*droites qui joignent les milieux de deux côtés opposés*).

On a le même théorème pour le quadrangle sphérique.