

Licence ès sciences mathématiques. Session de novembre 1896. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16 (1897), p. 129-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__129_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1896. — COMPOSITIONS.

Dijon.

ANALYSE. — I. *Périodes et valeurs diverses de l'intégrale*

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}}.$$

II. *Obtenir l'équation finie $y = f(x)$ de la courbe plane dont l'aire comprise entre elle, l'axe des x et les ordonnées d'abscisses 0, x a pour expression*

$$\left[\frac{y}{\varphi'(x)} \right]^m,$$

m et $\varphi(x)$ représentant un exposant et une fraction de x dérivés tous deux.

En posant

$$\int_0^x y dx = u,$$

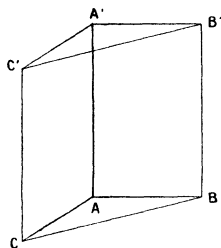
on obtient immédiatement l'équation différentielle

$$u = \left[\frac{du}{dx} \right]^m,$$

dont l'intégration s'opère sans difficulté. Il ne reste plus qu'à déterminer la constante arbitraire (ce qui n'est pas toujours possible), puis à différentier l'expression de u pour arriver à celle de y .

MÉCANIQUE. — I. *Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur.*

II. *Un prisme droit homogène, dont les bases sont deux triangles rectangles ABC, A'B'C', repose par la face ABA'B' sur un plan horizontal le long duquel il peut glisser sans frottement. Une tige pesante MN,*



située dans le plan de la section droite du prisme qui contient le centre de gravité, s'appuie, d'une part, sur



le plan horizontal et, d'autre part, sur la face BCB'C', et glisse sans frottement à ses deux extrémités.

On demande le mouvement du système.

La tige pesante est homogène. Dans sa position initiale, son extrémité supérieure est sur l'arête CC' et les vitesses initiales sont nulles.

On applique les théories des forces vives et du mouvement du centre de gravité.

Lyon.

ANALYSE. — I. *Démontrer que trois surfaces orthogonales se coupent suivant des lignes de courbure.*

II. *Intégrer*

$$pq = px + qy, \quad y = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Tout se réduit à trouver une intégrale *complète*, c'est-à-dire contenant deux paramètres arbitraires. Si z était une forme quadratique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, il en serait de même encore pour les deux expressions pq et $px + qy$. Poursuivons donc l'identification. Il viendra

$$\begin{aligned} pq &= 4(Ax + By)(Bx + Cy) \\ &= px + qy \\ &= 2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2), \end{aligned}$$

d'où

$$0 = A(2B - 1) = C(2B - 1), \quad AC = B(1 - B),$$

c'est-à-dire

$$0 = A = C, \quad B = 1 \quad \text{et} \quad z = 2xy$$

(solution sans paramètre), ou bien

$$B = \frac{1}{2}, \quad AC = \frac{1}{4}.$$

Il vient ainsi l'intégrale complète

$$\begin{aligned} z &= xy + \lambda x^2 + \frac{1}{4\lambda} y^2 + \mu, \\ \lambda, \mu &= \text{const. arbitr.} \end{aligned}$$

L'intégrale générale se construira par les procédés connus.

MÉCANIQUE. — *Un point M matériel non pesant est assujéti à se déplacer sans frottement sur un cylindre à section droite elliptique. M est attiré vers un point O, situé sur l'axe du cylindre, proportionnellement à la distance. Trouver le mouvement.*

Prenons O pour origine des coordonnées rectangulaires et l'axe du cylindre pour axe des z .

Soit A le point où la génératrice de M perce le plan des xy .

Le théorème des aires montre que A décrit la section droite suivant la loi képlérienne (aires proportionnelles aux temps). Projurons maintenant sur l'axe du cylindre, il viendra

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu^2 z, \quad z = z_0 \cos \mu(t - t_0),$$

$$\mu = \text{const. de l'attraction.}$$

On connaît ainsi comment se déplacent la génératrice variable MA et le point M sur ladite génératrice. La méthode est valable pour une section droite quelconque.

Achevons la solution pour la section droite elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

On a (théorème des aires), $h^2 = \text{const. des aires}$,

$$x dy - y dx = ab d\varphi = h^2 dt.$$

Si T est le temps d'une révolution complète, $2\pi ab = h^2 T$ et

$$d\varphi = \frac{2\pi}{T} dt, \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{2\pi}{T} (t - t_0).$$

La trajectoire est définie par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi, \\ z = z_0 \cos \frac{\mu T (\varphi - \varphi_0)}{2\pi}, \quad \frac{\varphi - \varphi_0}{2\pi} = \frac{t - t_0}{T} \end{array} \right\},$$

z_0, φ_0, T, t_0 dépendant des conditions initiales.

Marseille.

ANALYSE. — *Pour intégrer le système d'équations différentielles*

$$3x^3 \frac{dt_1}{dx} = (-3x^2 + 5)t_1 - (2x^4 + 12x^2 + 5)t_2,$$

$$3x^3 \frac{dt_2}{dx} = 5t_1 - 5(3x^2 + 2)t_2,$$

on fera successivement les changements de variables définis par les relations suivantes :

$$t_1 = z_1 + z_2, \quad t_2 = z_2; \quad z_1 x^2 = y_1, \quad z_2 x^4 = y_2,$$

et l'on sera ramené à un système d'équations différentielles de forme classique aux variables y_1 et y_2 .

On calculera les intégrales y_1 et y_2 qui se réduisent à $y_1 = 0$, $y_2 = -1$ quand on fait $x = 1$.

La variable x décrivant un chemin fermé quelconque allant du point $x = 1$ au même point $x = 1$, quelles sont les différentes valeurs au point $x = 1$ des fonctions y_1 et y_2 , z_1 et z_2 , t_1 et t_2 ?

Les changements de variables indiqués conduisent au système de forme classique

$$3x \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 2y_2,$$

$$3x \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 - 3y_2,$$

que l'on intègre en cherchant à déterminer les paramètres définis par

$$y_1 = k_1 x^r, \quad y_2 = k_2 x^r.$$

L'équation caractéristique, qui donne r , est

$$9r^3 + 1 = 0,$$

et la solution demandée est

$$y_1 = 2 \sin \left(\frac{\log x}{3} \right),$$

$$y_2 = 3 \sin \left(\frac{\log x}{3} \right) - \cos \left(\frac{\log x}{3} \right).$$

Le seul point singulier à distance finie est l'origine. Tout chemin fermé allant du point $x = 1$ au point $x = 1$ rentre dans l'une des classes suivantes :

1° S'il n'entoure pas l'origine, y_1 et y_2 reprennent les valeurs 0 et -1 au point $x = 1$;

2° S'il entoure une ou plusieurs fois, même en tournant dans les deux sens, chaque tour augmente ou diminue l'argument de $\log x$ de 2π , et l'arc soumis au signe sinus augmente ou diminue de $\frac{2\pi}{3}$. Par exemple, trois tours successifs dans le même sens ramènent les valeurs initiales 0 et -1 de y_1 et de y_2 . Il est facile de former toutes les valeurs demandées dans la dernière partie de la question.

MÉCANIQUE. — *Dans un plan horizontal, un tube homogène, de longueur $6a$, est mobile autour de son centre O, qui est fixe.*

Un point matériel, qui est mobile dans ce tube, est attiré par le point O proportionnellement à la distance.

La masse du tube est égale à celle du point.

À l'instant initial, le mobile est à une distance $2a$ du point O et la vitesse relative du mobile sur le tube est nulle.

La vitesse angulaire du tube est égale à ω .

Étudier le mouvement du système en supposant que l'attraction du point O sur le mobile à l'unité de distance est égale à $2m\omega^2$, où m désigne la masse du mobile et ω la vitesse angulaire initiale du tube.

Trouver la pression du point mobile sur le tube, et du tube sur le point O.

En désignant par m la masse commune du tube et du point, le moment d'inertie du tube par rapport au point O est $3ma^2$.

Si l'on applique le théorème des aires et celui des forces vives au mouvement du système, on obtient les deux équations suivantes, où ρ et θ désignent les coordonnées polaires du mobile :

$$(3a^2 + \rho^2) \frac{d\theta}{dt} = 7a^2\omega,$$

$$(3a^2 + \rho^2) \frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{d\rho^2}{dt^2} = 15a^2\omega^2 - 2\rho^2\omega^2,$$

et l'on en tire

$$\frac{d\rho}{dt} = \omega \sqrt{\frac{(a^2 - 2\rho^2)(\rho^2 - 4a^2)}{\rho^2 + 3a^2}};$$

ce qui prouve que le mobile oscillera entre les distances

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ et } \rho = 2a.$$

La pression N du mobile sur le tube est

$$N = \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt},$$

et il n'y a qu'à substituer.

La pression du tube sur le point O est égale à la pression précédente N.

ASTRONOMIE. — *On donne les trois côtés d'un triangle sphérique*

$$a = 65^{\circ}.27'.18''.32,$$

$$b = 84.35.26,84,$$

$$c = 95.43.53,76,$$

et l'on demande de calculer :

1° Les trois angles A, B et C;

2° Les accroissements qu'éprouvent ces trois angles quand les côtés reçoivent les petits accroissements respectifs

$$\Delta a = + 3'',2,$$

$$\Delta b = - 4,5,$$

$$\Delta c = + 6,7.$$

On considérera les accroissements comme des différentielles.

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{\sin(p-a)} \sqrt{\frac{\sin(p-a)(\sin p-b)(\sin p-c)}{\sin p}},$$

$$\Delta A = \frac{1}{\sin c \sin B} (\Delta a - \cos B. \Delta b - \cos C. \Delta c), \quad \Delta a = + 3'',2,$$

$$\Delta B = \frac{1}{\sin a \sin C} (\Delta b - \cos C. \Delta c - \cos A. \Delta a), \quad \Delta b = - 4,5,$$

$$\Delta C = \frac{1}{\sin b \sin A} (\Delta c - \cos A. \Delta a - \cos B. \Delta b), \quad \Delta c = + 6,7.$$

			L sin.
$a = 65^{\circ}.27'.18'',32$	$p - a = 57^{\circ}.26'.1'',14$		$\bar{1},9257084$
$b = 84.35.26,84$	$p - b = 38.17.52,62$		$\bar{1},7922172$
$c = 95.43.53,76$	$p - c = 27.9.25,70$		$\bar{1},6593765$
$2p = 245.46.38,92$	N		$\bar{1},3773021$
$p = 122.53.19,45$	N : sin p		$\bar{1},9241379$
	$\sqrt{\quad}$		$\bar{1},4531642$
			$\bar{1},7265821$
$\frac{A}{2} \quad 32^{\circ}.18'.7'',98$	$\tan \frac{A}{2}$		$\bar{1},8008737$
$\frac{B}{2} \quad 40.41.12,56$	$\tan \frac{B}{2}$		$\bar{1},9343649$
$\frac{C}{2} \quad 49.24.56,08$	$\tan \frac{C}{2}$		$0,0672056$

	L cos.	L $\Delta a, \Delta b, \Delta c.$	L (cos x Δ).		
A	$64^{\circ}.36'.15'',96$	$\bar{1},6324$	$+0,5051$	$+0,1375$	$\cos A. \Delta a \quad +1'',37$
B	$81.22.25,12$	$\bar{1},1764$	$-0,6532$	$-\bar{1},8296$	$\cos B. \Delta b \quad -0,68$
C	$98.49.52,16$	$-\bar{1},1862$	$+0,8261$	$-0,0123$	$\cos C. \Delta c \quad -1,03$

	L (Δ sin. sin.).		L (sin. sin.).	sin	sin.	
1. sin c sin B	4,91	0,6911	1,9537	a	1,9589	C 1,9948
2. sin a sin C	-4,84	-0,6849	1,9540	b	1,9981	A 1,9559
3. sin b sin A	6,01	0,7789	1,9929	c	1,9978	B 1,9951
log Δ.						
	5,46	0,7374				
	-5,38	-0,7309				
	6,11	0,7860				

Nancy.

ANALYSE. — I. On considère une fonction entière $f(z)$ telle que l'on ait, quel que soit z ,

$$f(z + \omega) = \mu f(z),$$

ω et μ étant des constantes.

1° Soient a et b deux points du plan des z où la fonction $f(z)$ prend une même valeur non nulle, la droite ab n'étant pas parallèle à la droite $O\omega$ qui joint l'origine au point ω ; soient a' et b' les deux points $a + \omega$ et $b + \omega$; soient enfin $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ les zéros de $f(z)$ distincts ou non appartenant au parallélogramme $ab, a'b'$, aucun d'eux n'étant sur le contour. On demande de calculer, à un multiple de $2\pi i\omega$ près, les deux sommes d'intégrales rectilignes

$$\int_a^b \frac{zf'(z)}{f(z)} dz - \int_{b'}^{a'} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz,$$

$$\int_{a'}^a \frac{zf'(z)}{f(z)} dz + \int_b^{b'} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz.$$

Quel est ce multiple dans le cas où, aucune des quantités π n'étant nulle, le module de $f(z)$ reste inférieur à tous leurs modules quand le point z décrit le côté ab ?

2° Démontrer que, si μ diffère de l'unité, il existe

une fonction primitive $F(z)$ de $f(z)$ telle que l'on ait aussi

$$F(z + \omega) = \mu F(z);$$

quel est, dans le cas de $\mu = 1$, la forme générale des fonctions primitives?

II. Les coordonnées étant rectangulaires, on considère la courbe plane C enveloppe de la droite

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = \varphi(\alpha),$$

où α désigne un paramètre variable et $\varphi(\alpha)$ une fonction déterminée de ce paramètre.

1° Supposant

$$\varphi(\alpha) = A \sin(\alpha + a) + A \frac{\cos(\alpha + a)}{\alpha},$$

former l'équation différentielle du deuxième ordre à laquelle satisfait $\varphi(\alpha)$ quelles que soient les constantes A et a , et écrire l'expression du rayon de courbure en fonction de α .

2° Trouver toutes les courbes C pour lesquelles $\varphi(\alpha)$ vérifie l'équation

$$\frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right) \varphi = \alpha.$$

I. En remarquant que

$$\int_b^a \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \int_b^a \frac{(z + \omega)f'(z)}{f(z)} dz,$$

on voit que la première somme est égale à

$$- \int_b^a \frac{\omega f'(z)}{f(z)} dz = -\omega [Lf(b) - Lf(a)];$$

et comme $f(b)$ est égal à $f(a)$, elle est de la forme $2n i \pi \omega$, n étant un nombre entier qui se réduit à zéro

si le module de $f(z)$ reste inférieur aux modules des zéros $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ le long de ab .

La somme des quatre intégrales, étant l'intégrale de $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ prise le long du parallélogramme $abb'a'$, est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des résidus de cette fonction, relatifs aux zéros $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ de $f(z)$, c'est-à-dire $2i\pi(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n)$. Les deux sommes demandées sont ainsi connues.

Soit maintenant $\varphi(z)$ une fonction primitive de $f(z)$; elle satisfait à l'équation

$$\varphi'(z + \omega) = \mu \varphi'(z),$$

d'où l'on tire

$$\varphi(z + \omega) = \mu \varphi(z) + c;$$

si μ diffère de l'unité, il suffit de poser

$$F(z) = \varphi(z) + \frac{c}{\mu - 1},$$

pour satisfaire à la condition

$$F(z + \omega) = \mu F(z);$$

si μ est égal à l'unité, la forme générale des fonctions primitives est $F(z) + \frac{cz}{\omega}$, $F(z)$ étant une fonction de z particulière admettant la période ω .

II. En éliminant les paramètres A et α entre $\varphi(\alpha)$ et ses deux premières dérivées, on trouve que la fonction $\varphi(\alpha)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right) \varphi = 0,$$

et que le rayon de courbure est égal à $\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha)$. Pour intégrer l'équation différentielle donnée, avec second membre, il suffit d'ajouter à la valeur attribuée

à $\varphi(\alpha)$, dans la première partie, l'intégrale particulière

$$\alpha + \frac{2}{x}.$$

MÉCANIQUE. — *Démontrer que la stabilité de l'équilibre d'un solide rigide homogène pesant, flottant dans un fluide homogène pesant, est assurée lorsque le centre de poussée n'est pas au-dessous du centre de gravité du solide rigide, à une distance supérieure à $\frac{1}{V}$, où I est le plus petit moment d'inertie de la section d'affleurement, relativement aux axes passant par son centre de gravité, et où V est le volume immergé.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — ASTRONOMIE. — *Calculer la longitude et la latitude d'un astre dont les coordonnées équatoriales sont*

$$R = 8^h 18^m 30^s, \quad D = 10^\circ 36' 52'' \frac{1}{4};$$

l'obliquité de l'écliptique est $\omega = 23^\circ 27' 35'' 8$.

Poitiers.

ANALYSE. — *Montrer que l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \quad f\left(p, q, \frac{y}{x}\right) = 0$$

admet des solutions qui représentent des cônes ayant leurs sommets sur l'axe Oz.

Considérant en particulier l'équation

$$(2) \quad qx - py - \sqrt{1+p^2+q^2} \sqrt{x^2+y^2} \varphi \frac{x}{y} = 0,$$

transformer cette équation et l'équation différen-

tielle des cônes dont le sommet est sur Oz , en prenant pour variables indépendantes les coordonnées polaires r et ϑ .

Faire voir que l'on obtient l'équation finie des cônes solutions communes à l'aide de quadratures.

Effectuer le calcul en supposant

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{my}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Examiner le cas où $m = 1$.

Démontrer que toutes les surfaces représentées par l'équation (2) sont coupées par le plan $y = ax$ suivant des lignes de courbure. (a désigne une constante.)

MÉCANIQUE. — 1. Lieu des points d'un plan lié au mouvement d'un corps solide dont les vitesses, à un instant donné, sont également inclinées sur la normale au plan.

2. Équations du mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe. — Intégrales premières. — Cas d'un corps pesant animé d'une très grande vitesse de rotation autour de son axe, et que l'on abandonne à lui-même sans autre vitesse initiale. — Calcul de la précession et de la nutation à un instant quelconque.

ASTRONOMIE. — Le 1^{er} novembre 1896, à midi vrai, la déclinaison du Soleil est $-14^{\circ} 41' 19'' 4$.

Le 2 novembre, elle est $-15^{\circ} 0' 16'' 5$.

L'accroissement de l'ascension droite dans l'intervalle est $3^m 56^s, 2$.

Calculer l'obliquité de l'écliptique.

Toulouse.

ANALYSE. — I. a, b, c, d désignant des quantités données, étudier les valeurs diverses de l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}}$$

lorsque le chemin d'intégration varie, en conservant les mêmes extrémités; indiquer ce que l'on entend par périodes de cette intégrale.

II. On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$1 + p^2 + q^2 - 2z = 0,$$

où p et q désignent, suivant l'usage, les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, par rapport aux variables indépendantes x et y de la fonction z .

1° Démontrer que, si l'on considère x, y, z comme les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point, il existe des surfaces intégrales particulières de cette équation qui sont de révolution autour d'une parallèle à l'axe coordonné Oz .

2° Déterminer une surface intégrale passant par la parabole dont les équations sont

$$x = 0, \quad y = 2z - 1;$$

ce problème admet-il une ou plusieurs solutions?

MÉCANIQUE. — I. Un point matériel pesant, assujéti à se mouvoir sur un cylindre de révolution dont l'axe est vertical, est attiré par un point fixe proportionnellement à la distance. On demande d'étudier le mouvement de ce point. Pression exercée par le point sur la surface.

Cas particulier : le centre d'attraction est situé sur l'axe du cylindre.

II. *Indiquer très succinctement la marche à suivre pour établir les six équations d'Euler, qui permettent d'étudier le mouvement d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un point fixe et sollicité par des forces données.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une planète décrit une orbite elliptique. A un instant donné, l'anomalie vraie v , l'excentricité $\sin \varphi$, le rayon vecteur r sont déterminés par les valeurs suivantes :*

$$v = 310^{\circ} 55' 29'', 64, \quad \varphi = 14^{\circ} 12' 1'', 87, \quad \log r = 0,3307640.$$

On demande le paramètre de l'orbite, le demi grand axe, et, à l'instant donné, l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne.