

PAUL APPELL

Exercice sur les courbes de direction

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15
(1896), p. 491-495

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__491_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[M¹8b]

EXERCICE SUR LES COURBES DE DIRECTION;

PAR M. PAUL APPELL.

Laguerre a appelé *courbes de direction* ⁽¹⁾ les courbes algébriques

$$f(x, y) = 0$$

telles que les cosinus directeurs de la tangente en un point (x, y) puissent être exprimés *rationnellement* en fonctions de x et y . En d'autres termes, ce sont des courbes pour lesquelles la quantité

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

peut s'exprimer rationnellement en fonction de x et y .

(¹) Voir *Bulletin de la Société mathématique*, 1880.

Pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que la différentielle ds de l'arc de la courbe soit égale à une fonction rationnelle de x et de y multipliée par dx . En effet, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} dx,$$

en vertu de la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0.$$

Nous nous proposons d'indiquer un moyen de déduire d'une courbe de direction une infinité d'autres courbes de direction.

Soit

$$(1) \quad F(X, Y) = 0$$

une de ces courbes. En appelant S l'arc de cette courbe on a

$$(2) \quad dS = \sqrt{dX^2 + dY^2} = R(X, Y) dX,$$

$R(X, Y)$ désignant une fonction rationnelle de X et Y .

Soient $z = x + yi$ une variable imaginaire, $f(z)$ une fonction rationnelle de z choisie de telle façon que tous les résidus de $f^2(z)$ soient *nuls*. Posons

$$(3) \quad Z = X + Yi = \int f^2(z) dz.$$

L'intégrale du second membre est alors rationnelle en z et l'on a, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(4) \quad X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ désignant des fonctions rationnelles de x et y .

Si l'on fait la substitution (4), la courbe (1) se transforme en une autre courbe

$$(5) \quad G(x, y) = 0,$$

qui est aussi *une courbe de direction*.

En effet, l'équation (3) donne

$$dX + i dY = f^2(z)(dx + i dy).$$

Changeons i en $-i$, appelons z_0 la conjuguée de z et f_0 la fonction déduite de f par le changement de signe de i . Il vient

$$dX - i dY = f_0^2(z_0)(dx - i dy).$$

Multipliant membre à membre, on a

$$dX^2 + dY^2 = f^2(z)f_0^2(z_0)(dx^2 + dy^2),$$

et, en extrayant les racines,

$$dS = f(z)f_0(z_0) ds.$$

Comme, par hypothèse, $\frac{dS}{dX}$ est une fonction rationnelle de X et Y , on a

$$ds = \frac{R(X, Y)}{f(z)f_0(z_0)} dX,$$

et, d'après les formules de transformation (4), $\frac{ds}{dx}$ est une fonction rationnelle de x et y : en effet, ces formules montrent que $\frac{dX}{dx}$ est rationnel en x et y . La nouvelle courbe est donc bien une courbe de direction.

Exemples. — En partant de la ligne droite et du cercle, on obtient ainsi une infinité de courbes de direction.

Ainsi prenons

$$X + Yi = 3 \int z^2 dz = z^3,$$

nous aurons

$$X = x^3 - 3xy^2.$$

La droite $X = a^3$ devient la courbe de direction

$$x^3 - 3xy^2 = a^3,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^3 \cos 3\theta = a^3.$$

De même, en faisant

$$f^2(z) = 5z^4, \quad f^2(z) = (2k+1)z^{2k}$$

(k entier positif ou négatif), on déduit de $X = a^k$ la courbe de direction

$$r^{2k+1} \cos(2k+1)\theta = a^{2k+1}.$$

Si l'on prend $f(z) = \frac{1}{z}$, la transformation se ramène à une inversion.

Remarque. — En prenant pour $f(z)$ une fonction transcendante uniforme, telle que les résidus de $f^2(z)$ soient tous nuls, on obtient une transformation faisant correspondre à une courbe algébrique de direction une courbe transcendante telle que l'arc s de cette courbe vérifie une équation de la forme

$$ds = \Phi(x, y)dx,$$

Φ étant uniforme. Ainsi, en prenant

$$f(z) = e^{\frac{x+yi}{2a}}$$

(a réel), on a

$$X = ae^{\frac{x}{a}} \cos \frac{y}{a},$$

et la droite $X = a$ devient la courbe

$$\frac{x}{a} \cos \frac{y}{a} = 1;$$

c'est la chaînette d'égale résistance de Coriolis, pour laquelle

$$ds = \frac{dy}{\cos \frac{y}{a}}.$$