

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15
(1896), p. 434-439

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__434_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1666.

Par un point fixe du plan d'un cercle donné (C), on mène une corde quelconque dont les extrémités sont A et B. Le cercle (Σ) de diamètre PA rencontre le cercle C en un second point A'; le cercle (Σ'), de diamètre PB, rencontre le cercle (C) en un second point B'. Montrer que le point de concours des droites AA' et BB', ainsi que le point de concours des tangentes communes aux cercles (Σ) et (Σ') sont tous deux sur une même droite fixe.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION ANALYTIQUE.

Par M. A. DROZ-FARNY.

Choisissons un système orthogonal d'axes avec O comme origine et OP comme axe des x et posons $OP = d$.

Équation du cercle (C)

$$(I) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Équation de PAB

$$(II) \quad y = m(x - d).$$

Le cercle (Σ) aura pour équation, en représentant par x', y' les coordonnées de A,

$$\begin{aligned} & (x - d)(x - x') + y(y - y') = 0, \\ \text{ou} \quad & x^2 + y^2 - x(d + x') - y y' + dx' = 0. \end{aligned}$$

De même l'équation de Σ' est :

$$x^2 + y^2 - x(d + x'') - yy'' + dx'' = 0.$$

Il en résulte que les équations de AA' et de BB' sont respectivement

$$x(d + x') + yy' - dx' - r^2 = 0$$

$$x(d + x'') + yy'' - dx'' - r^2 = 0.$$

On obtiendra le lieu du point d'intersection de ces droites en éliminant entre ces équations les variables x' , y' , x'' et y'' . On peut procéder de la manière suivante : les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite PA, donc $y' = m(x' - d)$. En portant cette valeur dans l'équation de AA', elle devient

$$x'(x + my - d) + dx - myd - r^2 = 0;$$

on a de même

$$x''(x + my - d) + dx - myd - r^2 = 0;$$

Les deux variables x' et x'' vérifiant simultanément une relation de la forme $Ax + B = 0$, il faut que $A = 0$ et $B = 0$, d'où

$$x + my - d = 0 \quad \text{et} \quad dx - myd - r^2 = 0.$$

En éliminant entre ces deux équations la seule variable m , on a, pour le lieu,

$$x = \frac{d^2 + r^2}{2d},$$

ligne droite perpendiculaire sur OP.

Cherchons maintenant le lieu du point de rencontre des tangentes communes aux cercles (Σ) et (Σ') .

Représentons, pour cela, par G' et G'' les centres de (Σ) et (Σ') et par R le point de coupe des tangentes extérieures aux deux circonférences.

Évidemment le point P doit être intérieur à (C); comme ce point est le centre de similitude interne de (Σ) et (Σ') , on aura

$$(G'G''PR) = -1.$$

Or les abscisses respectives de G' , G'' , P et R sont

$$\frac{x' + d}{2}, \quad \frac{x'' + d}{2}, \quad d, \quad x;$$

on a, par conséquent,

$$\left(\frac{x' + d}{2} + \frac{x'' + d}{2} \right) (x + d) = 2 \left[\frac{(x' + d)(x'' + d)}{4} + xd \right],$$

d'où

$$(1) \quad x(x' + x'' - 2d) = x'x'' - d^2.$$

En combinant les équations $x^2 + y^2 = r^2$ et $y = m(x - d)$, on obtient

$$x^2(1 + m^2) - 2m^2 dx + m^2 d^2 - r^2 = 0,$$

d'où

$$x' + x'' = \frac{2m^2 d^2}{1 + m^2}, \quad x'x'' = \frac{m^2 d^2 - r^2}{1 + m^2}.$$

Portons ces valeurs dans (1), cette relation devient, comme précédemment,

$$x = \frac{d^2 + r^2}{2d}.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. A. DROZ-FARNY.

Comme angle $PA'A = \text{angle } PB'B = 90^\circ$ les droites AA' et BB' enveloppent une conique ayant P et son symétrique par rapport au centre de (C) comme foyers. Ces deux droites se coupent en S. On a

$$SA \cdot SA' = SB \cdot SB' = SP^2.$$

Le lieu de S est donc l'axe radical du cercle (C) et du cercle point P, et, par conséquent, une perpendiculaire sur OP à une distance OM du centre telle que

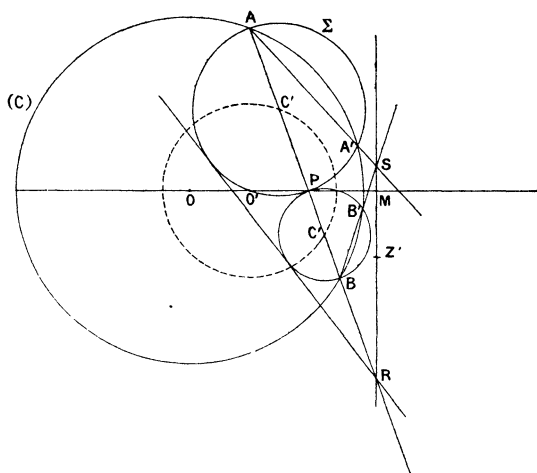
$$OM^2 - r^2 = (OM - d)^2,$$

d'où

$$OM = \frac{r^2 + d^2}{2d}.$$

Représentons comme précédemment par G' et G'' les centres de (Σ) et (Σ') , ces deux points sont sur une circonférence fixe de rayon $\frac{r}{2}$ ayant son centre en O' point milieu de PO. Comme

C', C'', P et R sont quatre points harmoniques, le lieu de R est la polaire de P par rapport à cette circonférence, donc une



droite perpendiculaire sur $O'P$ à une distance $O'M$ telle que

$$O'M.O'P = \frac{r^2}{4},$$

done

$$O'M = \frac{r^2}{2d}$$

et

$$\text{OM} = \frac{r^2}{2d} + \frac{d}{2} = \frac{r^2 + d^2}{2d}.$$

Question 1669.

Par le foyer F d'une parabole, on mène une corde AB et l'on décrit sur AB comme diamètre une circonférence (Σ) qui rencontre la parabole en deux autres points C et D. On porte sur FC, du côté opposé à C, une longueur FD' = FD, et sur FD, du côté opposé à D, une longueur FC' = FC. Montrer que les points C' et D' sont situés sur la circonférence (Σ). (E.-N. BARISIEN.)

Prenons les symétriques C' , D' de C , D par rapport à AB , ces points sont sur (Σ) . Les diagonales CD' , $C'D$ du trapèze $CDC'D'$ se coupent sur la polaire de T par rapport à (Σ) , c'est-à-dire qu'elles passent par F et l'on a bien $FD' = FD$, $FC' = FC$. La question posée est donc résolue.

Question 1679.

(1894, p. 5°.)

On considère les coniques passant par deux points fixes et tangentes à une droite donnée en un point donné. Lieu du point de concours des tangentes à la conique menées par deux points fixes pris sur la droite.

(ANDRÉ CAZAMIAN.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Représentons par P et Q les deux points fixes; chaque conique passant par ces points est tangente en D à la droite donnée. Soient, en outre, A et B les points fixes de départ des tangentes et C leur point d'intersection.

Effectuons une transformation homographique de la figure, de manière que les points P et Q coïncident avec les ombilics du plan, et soient a, b, c et d les transformés de A, B, C et D .

Il s'agira de chercher le lieu des points d'intersection des tangentes que l'on peut mener de a et b aux circonférences tangentes en un point fixe d à la droite ab . Comme $ca - cb = da - db$, le lieu est une hyperbole admettant a et b comme foyers, ou une ligne droite perpendiculaire en d sur ab si $ad = db$. Revenons à la figure primitive.

Le lieu cherché est une conique passant par D et inscrite dans le quadrilatère $ABPQ$. Si A, D, B et le point d'intersection de AB et PQ sont quatre points harmoniques, le lieu est une ligne droite passant par D .
