

V. JAMET

Sur les intégrales de Fresnel

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15
(1896), p. 372-376

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__372_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[E5]

SUR LES INTÉGRALES DE FRESNEL;

PAR M. V. JAMET.

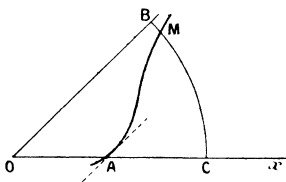
Dans le calcul des intégrales de Fresnel

,

$$\int_0^{\infty} \sin \frac{\pi}{2} v^2 dv, \quad \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} v^2 dv,$$

on rencontre la difficulté suivante : *Démontrer que l'intégrale $\int e^{-z^2} dz$, calculée tout le long d'un arc égal au $\frac{1}{8}$ d'une circonférence ayant pour centre l'origine, tend vers zéro lorsque le rayon de cette circonférence croît au delà de toute limite.* Les démonstrations qu'on en trouve dans divers Traités de Calcul intégral sont, ou très pénibles, ou insuffisantes sous le rapport de la rigueur. J'espère que la démonstration suivante sera suffisamment claire et rigoureuse.

Construisons la courbe représentée, en coordonnées polaires, par l'équation $r = \sqrt{\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$. Elle présente une branche infinie partant d'un point A, situé



sur l'axe polaire à une distance de l'origine égale à l'unité; elle admet une asymptote OB issue de l'origine et faisant avec Ox un angle égal à $\frac{\pi}{4}$. Sur cette branche infinie, prenons un point M, dont les coordonnées polaires seront R et θ_0 , R étant aussi grand que nous le voudrions, et traçons un arc de cercle BMC, ayant R pour rayon, O pour centre, et limité aux points C, B, où il coupe l'axe polaire et l'asymptote de notre courbe. L'intégrale $\int e^{-z^2} dz$, calculée le long de cet arc de cercle, se divise en deux parties, l'une relative à l'arc CM, l'autre à l'arc MB. Je dis que chacune d'elles

a un module infiniment petit avec $\frac{1}{R}$. En effet, si l'on pose

$$z = R(\cos \theta + i \sin \theta),$$

notre intégrale se transforme comme il suit :

$$\begin{aligned} \int_{CB} e^{-z^2} dz &= \int_{CM} e^{-z^2} dz + \int_{MB} e^{-z^2} dz \\ &= R i \int_0^{\theta_0} \frac{e^{\theta i} d\theta}{e^{R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)}} + R i \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\theta i} d\theta}{e^{R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)}}. \end{aligned}$$

La première partie de cette somme a un module moindre que la somme des modules de ses éléments, savoir

$$(A) \quad R \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{e^{R^2 \cos 2\theta}},$$

et, comme $e^{R^2 \cos 2\theta}$ est constamment supérieur à $R^2 \cos 2\theta$, cette dernière intégrale est inférieure à

$$\frac{1}{R} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1}{2R} \log \tan \left(\theta_0 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\log R}{R}.$$

Donc l'intégrale (A) tend vers zéro avec $\frac{1}{R}$.

Considérons encore l'intégrale

$$(B) \quad R \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{e^{R^2 \cos 2\theta}},$$

elle est inférieure à

$$R \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right) = R \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right) \times \frac{\frac{\pi}{4} - \theta_0}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right)}.$$

Mais le facteur $R \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right)$ est la mesure de la distance du point M à l'asymptote OB de notre courbe auxiliaire; donc ce facteur tend vers zéro, tandis que le

facteur suivant tend vers 1; donc l'intégrale (B) a pour limite zéro. En résumé, l'intégrale $\int_{\text{CMB}} e^{-z^2} dz$ se décompose en une somme de deux parties, ayant chacune un module infiniment petit avec $\frac{1}{R}$; donc elle a elle-même un module infiniment petit.

On connaît la suite de la démonstration. L'intégrale $\int e^{-z^2} dz$, calculée tout le long du contour OCMBO, étant nulle, on trouve

$$\int_0^{\text{OC}} e^{-x^2} dx + \int_{\text{CMB}} e^{-z^2} dz - \int_0^{\text{OB}} \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} e^{-l^2} dl = 0,$$

et, en supposant que OC croisse au delà de toute limite,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx - \frac{1 + \sqrt{-1}}{2} \int_0^{\infty} (\cos l^2 - \sqrt{-1} \sin l^2) dl.$$

Tenant compte de l'égalité

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

démontrée quand x varie par des valeurs réelles et séparant les parties réelles des parties imaginaires, on trouve

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\infty} \cos l^2 dl + \int_0^{\infty} \sin l^2 dl,$$

$$0 = \int_0^{\infty} \cos l^2 dl - \int_0^{\infty} \sin l^2 dl.$$

D'où

$$\int_0^{\infty} \cos l^2 dl = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{\infty} \sin l^2 dl = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

(376)

ou, résultat équivalent,

$$\int_0^\infty \cos \frac{\pi}{2} \nu^2 d\nu = \int_0^\infty \sin \frac{\pi}{2} \nu^2 d\nu = \frac{1}{2}.$$