G. FONTENÉ

Sur un cas remarquable de la projection gauche

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 369-372

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__369_1>

[P6f]

SUR UN CAS REMARQUABLE DE LA PROJECTION GAUCHE;

PAR M. G. FONTENÉ,
Professeur au collège Rollin.

1. On connaît ce théorème, donné par la notion du point autohomologue, de deux figures semblables en Géométrie plane :

Étant données, dans un plan, deux figures semblables F *et* F′, *avec même sens de rotation, si l'on partage dans un même rapport les droites* AA′, BB′, CC′, ... *qui joignent deux points correspondants, les points de partage* A″, B″, C″, ... *déterminent une figure* F″ *semblable aux deux premières.*

On en déduit immédiatement cet autre théorème, dont la première idée appartient à l'un de mes anciens élèves, Jean Siegler :

Étant données, dans deux plans parallèles P *et* P′, *deux figures semblables F et F', avec même sens de rotation, les droites AA', BB', CC',... qui joignent deux points correspondants rencontrent un plan P'' parallèle aux deux premiers en des points A'', B'', C'',... qui déterminent une figure F'' semblable aux deux premières.*

On ramène ce théorème au premier en projetant obliquement les figures F' et F'' sur le plan P : la direction des projetantes étant AA' par exemple, le point A est le point autohomologue pour la figure plane obtenue.

2. On peut disposer des deux paramètres du point courant M de la figure F pour faire que la droite MM'M'' soit perpendiculaire au plan P, et je le désigne alors par OO'O'' : si l'on projette orthogonalement les figures F' et F'' sur le plan P, le point O est le point autohomologue pour la figure plane obtenue. On peut démontrer le théorème en employant la propriété bien connue du quadrilatère gauche, et en faisant une rotation autour de OO'O'' ; on prend sur OB et sur O'B' les longueurs Oα, O'α' respectivement égales aux longueurs OA, O'A', on mène $\alpha\alpha'$....

3. La correspondance entre les points courants M, M', M'' est déterminée dès que l'on connaît les deux segments homologues AB et A'B', ou encore les deux droites AA' et BB'. Avec des coordonnées polaires, les pôles étant A et A', les axes polaires étant Ax et A'x' dirigées suivant AB et A'B', et en posant $k' = \frac{A'B'}{AB}$, on peut dire : à tout point M du plan P, de coordonnées θ et r, répond un point M' du plan P', de coordonnées θ et $k'r$; en remplaçant A'x' par A'ξ' parallèle à Ax, les

coordonnées de M′ sont $\alpha' + \theta$ et $k'r$. Ce point de vue conduit à une démonstration analytique du théorème :

On prend A *pour origine,* AA′A″ *pour axe des* z, *et, dans le plan* P, *des axes rectangulaires dont l'un* Ax *est suivant* AB; *on trouve que, par rapport au pôle* A″ *et à l'axe polaire* $A''\xi''$ *parallèle à* Ax, *les coordonnées de* M″ *sont* $\alpha'' + \theta$ *et* $k''r$, α'' *et* k'' *étant des constantes ; on a par exemple*

$$\operatorname{tang}\alpha'' = \frac{a''k'\sin\alpha'}{a''k'\cos\alpha' + (a' - a'')},$$

a' *et* a'' *étant les* z *des points* A′ *et* A″.

4. Relativement aux droites MM′ ou μ, qui forment une congruence, on a ce théorème :

Les droites μ *sont les droites qui rencontrent deux droites fixes* Δ *et* Δ'; *celles-ci sont les parallèles au plan* P *qui s'appuient sur* AA′, *sur* BB′, *et sur le cercle de l'infini, ou encore les droites qui, partant des points cycliques du plan* P, *rencontrent* AA′ *et* BB′.

On le démontre facilement en cherchant par la Géométrie analytique une droite $z = h$, $y = mx$, qui rencontre la droite MM′ quels que soient r et θ; on trouve

$$m = \pm i, \qquad 1 - \frac{a'}{h} = k'(\cos\alpha' \pm i\sin\alpha').$$

En appelant h_1 et h_2 les deux valeurs de h qui sont imaginaires conjuguées, on a la formule

$$k'^2 = \left(1 - \frac{a'}{h_1}\right)\left(1 - \frac{a'}{h_2}\right),$$

qui donne k' en fonction de a' supposé variable, et l'on a ensuite α' par les formules

$$\cos\alpha' + i\sin\alpha' = \left(1 - \frac{a'}{h_1}\right) : k',$$

$$\cos\alpha' - i\sin\alpha' = \left(1 - \frac{a'}{h_2}\right) : k';$$

si le point A de la droite $AA'A''$ est choisi tel que l'on ait $h_1 + h_2 = 0$, on a simplement

$$\tan\alpha' = \frac{ia'}{h_1}, \qquad k' = \frac{1}{\cos\alpha'}.$$

Parmi les droites μ qui rencontrent les deux droites fixes Δ et Δ', on doit remarquer la perpendiculaire commune OO'.

On voit que la correspondance entre les points homologues M et M' des deux plans P et P' est en somme établie par une projection gauche; on appelle ainsi (Steiner, Abel, Transon, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1865, p. 385, et 1866, p. 63, 213) un mode de projection dans lequel les projetantes sont assujetties à rencontrer deux droites fixes Δ et Δ'; ces droites fixes sont ici deux isotropes, le plan P de la figure à projeter et le tableau P' sont deux plans parallèles à ces isotropes, et il arrive alors que la figure projetée et la projection sont deux figures semblables.