

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15
(1896), p. 339-344

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__339_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1707.

(1896, p. 55).

Les courbes (M) et (M') sont caustiques réciproques par rapport à la courbe (A) , c'est-à-dire que les tangentes MA et $M'A$ aux courbes (M) et (M') font des angles égaux avec la normale Ax en A à la courbe (A) , x étant le centre de

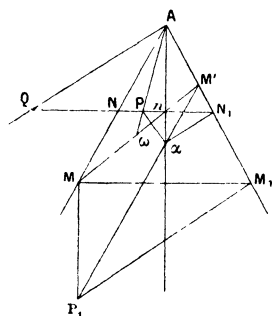
courbure correspondant. La perpendiculaire abaissée de M sur $A\alpha$ coupe AM' en M_1 . Démontrer que la perpendiculaire élevée en M à MM_1 et la perpendiculaire élevée en M_1 à AM_1 se coupent sur la droite $\alpha M'$, ce qui permet de construire le point M' lorsque M et α sont connus.

COROLLAIRE. — Si la courbe (A) est une conique de foyers M et M' , ce théorème fait connaître le centre de courbure α répondant au point A de la conique. (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. E. DUPORCQ.

Si l'on remplace la courbe (A) par une autre courbe osculatrice à la première au point A, le point M' ne changera évi-



demment pas sur la droite AM' : en choisissant comme courbe (A) la conique de foyer M qui passe par A et admet α comme centre de courbure correspondant, on voit que la démonstration de la question revient à celle du corollaire qui en termine l'énoncé.

Soit donc P_1 le point où se coupent la perpendiculaire élevée en M à MM_1 et la perpendiculaire élevée en M_1 à AM_1 : nous voulons montrer que la droite $P_1 M'$ et la perpendiculaire $A\alpha$ à MM_1 ont pour point de concours α , le centre de courbure répondant au point A de la conique de foyers M et M' normale en A à $A\alpha$. Soient ω le milieu de MM' , n le point où $A\alpha$ coupe MM' , enfin N, N_1 , P et Q les points où la parallèle à MM_1 menée par n coupe respectivement les droites AM , AM_1 , $A\omega$ et la parallèle menée par A à MM' . Les triangles MP_1M_1 et $n\alpha N_1$

étant homothétiques par rapport au point M' , on voit que N_1 est la projection de α sur AM_1 . D'ailleurs, les points P et Q sont conjugués harmoniques par rapport aux points N et N_1 ; on a donc

$$\overline{nP} \overline{nQ} = \overline{nN} \overline{nN_1} = -\overline{nN_1}^2 = \overline{n\alpha} \overline{nA}.$$

L'égalité des termes extrêmes montre que P est l'orthocentre du triangle $A\alpha Q$. Par suite, αP est perpendiculaire à MM' . La détermination du point α au moyen des droites ωA , nP et $P\alpha$ est une construction connue du centre de courbure de la conique de centre ω , d'axe MM' , normale en A à An . Le théorème en résulte.

Remarque. — La construction du point M' se simplifie ainsi : N étant la projection de α sur AM , et n celle de N sur $A\alpha$, la droite MM' passe par n .

Question 1708.

(1896, p. 55.)

Soit M le pied de la perpendiculaire abaissée du point fixe O sur la tangente en A à la courbe (A) . Le point M décrit la podaire (M) de la courbe (A) pour le point O . La perpendiculaire élevée en O à OM coupe la normale en A à la courbe (A) au point m . On sait que Mm est la normale à la podaire (M) .

Soient, en outre, α et μ les centres de courbure des courbes (A) et (M) répondant aux points A et M .

On a les théorèmes suivants :

I. Si la perpendiculaire élevée à OA au point O coupe $A\alpha$ au point B , et si MB coupe $O\alpha$ au point D , la droite AD passe par μ .

II. Si la perpendiculaire élevée à Mm en m coupe OM au point H , la droite qui joint le point H au milieu I de $O\alpha$ passe par μ .

III. Si J est le pied de la perpendiculaire abaissée de α sur OM , K le pied de la perpendiculaire abaissée de J sur Mm , L le pied de la perpendiculaire abaissée de K sur $A\alpha$, la droite OL passe par μ .

Le théorème I a été démontré par M. Husquin de Rhéville dans les Nouvelles Annales (3^e série, t. IX, p. 142). J'ai obtenu les théorèmes II et III par des voies absolument différentes. Je propose ici de déduire ces deux théorèmes du précédent.

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION (1)

par M. E. DUPORCQ.

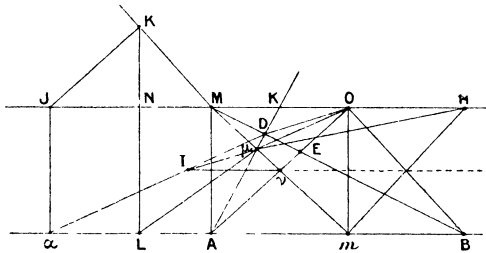
II. Les points μ et α se correspondant de manière que la propriété I soit satisfaite, il s'agit de prouver que le point I, où se coupent OD et H μ , est le milieu de O α . Je désigne par ν et E les points d'intersection de OA avec M m et MB. Évidemment

$$(M\mu\nu m) = (MDEB),$$

d'où

$$H(M\mu\nu m) = O(MDEB).$$

Les rayons HM et OM coïncidant, les intersections des autres rayons conjugués sont en ligne droite : le point I est



donc sur la droite qui joint V au point commun à OB et mH . La propriété à démontrer en résulte.

III. Il s'agit de prouver que le point L, où O μ coupe AB est la projection de K sur cette droite, ou encore, en désignant par N la projection de K sur MJ, il faut prouver que

$$\frac{LA}{L\alpha} = \frac{NM}{NJ} = \frac{OM}{OH}.$$

Or, soit K le point où AD coupe OM; on a

$$\frac{LA}{L\alpha} = O(AD\mu K) = M(AD\mu K) = \frac{mA}{mB},$$

C. Q. F. D.

(1) La proposition I est déjà démontrée, comme le rappelle l'énoncé de la question.

Question 1718.

(1896, p. 151.)

$f(z)$ désignant un polynome entier en z , on a l'égalité

$$2i\pi[f(x) - f(0)] = \oint_C f'(z) Lz dz,$$

$f'(z)$ désignant la dérivée de $f(z)$ et l'intégrale étant prise dans le sens positif le long d'un contour fermé C simple, partant du point x pour y revenir après avoir entouré l'origine O .
(C. BOURLET.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Décrivons du point x un lacet dont l'entrée est en x et la boucle un cercle de rayon ε infiniment petit enveloppant l'origine O . L'intégrale prise le long du contour C et du lacet sera nulle, car il n'existe dans le champ ainsi délimité aucun point critique de la fonction $f'(z) Lz dz$.

Précisons maintenant la valeur de l'intégrale sur chacune des branches de ce parcours. Désignons par Λ sa valeur prise de x à 0 dans le sens direct, le long de la branche rectiligne du lacet au-dessus de la droite xO . Le point z , après avoir contourné l'origine, revient en x sur la branche rectiligne inférieure du lacet, dans le sens inverse. Mais après que z a tourné autour de O , Lz a crû de $2\pi i$; donc l'intégrale sur la deuxième branche du lacet sera $-\Lambda - 2\pi i \int_x^0 f'(z) dz$. Quant à sa valeur I sur le petit cercle, elle est nulle. En effet, en posant $z = \Sigma e^{\theta i}$, on aura

$$I = \int_0^{2\pi} f'(\varepsilon e^{\theta i}) (L\varepsilon + \theta i) \varepsilon e^{\theta i} i d\theta = 0,$$

car à la limite $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon L\varepsilon = 0$.

Finalement, on a l'équation

$$0 = \Lambda + I - \Lambda - 2\pi i \int_r^0 f'(z) dz - \int_C f'(z) Lz dz,$$

d'où

$$\int_C f'(z) Lz dz = 2\pi i [f(x) - f(0)].$$

Remarque sur la question 1644 (1).

Pour résoudre cette question, il suffisait de dire :

La normale en A rencontre de nouveau la parabole en B. Le diamètre qui passe par le pôle C de AB coupe ce segment en son milieu F. On a alors $\frac{CA}{AF} + 2\frac{CB}{AB}$. Donc, etc. Z.