NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FÉLIX KLEIN

Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 327-331

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__327_1>

[D2d]

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DU DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE ORDINAIRE [1];

PAR M. FÉLIX KLEIN.

(Traduit de l'allemand par M. L. LAUGEL.)

Soit ω une grandeur réelle que, pour simplifier, je suppose irrationnelle; soit ensuite le développement en fraction continue ordinaire,

$$\omega = \mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cfrac{1}{\mu_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

[1] *Göttinger Nachrichten,* 19 octobre 1895.

Je désignerai les réduites successives par $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots,$ où les p, q doivent être définis comme des nombres sans diviseur commun, qui, du reste, peuvent être affectés, d'une manière quelconque, du signe $+$ ou du signe $-$. Je considère maintenant le système habituel de coordonnées X, Y et je forme le réseau correspondant de points nombres entiers; parmi eux, je recherche ceux pour lesquels $x, y = p_\nu, q_\nu$. On sait que ces *points d'approximation* (*näherungspunchte*) sont situés alternativement du côté droit et du côté gauche de la ligne droite $\frac{x}{y} = \omega$.

Mais il est extrêmement facile, comme je l'ai découvert, de présenter à ce sujet une courte interprétation géométrique.

J'envisagerai ici seulement celui des deux quadrants de notre système de coordonnées qui est partagé en deux parties par la droite ω. Ce quadrant sera décomposé, par ladite droite, en deux secteurs dont l'un est limité par l'axe X, l'autre par l'axe Y. Je les désignerai, pour abréger, sous les noms de *secteur* X et *secteur* Y.

On considérera maintenant les points nombres entiers de chaque secteur pris séparément.

Il est évident que nous pouvons les entourer par un contour polygonal rectiligne, par exemple en concevant que les points nombres entiers aient été marqués par des épingles, et que l'on ait alors entrelacé un fil entourant le tout. *Les points* p_1, q_1; p_3, q_3; ... *ne sont alors autre chose que les sommets du contour polygonal appartenant au secteur* Y; *les points* p_2, q_2; p_4, q_4; ... *appartiennent de même au secteur* X. Chaque côté du contour polygonal, par exemple le côté allant de $(p_{2\nu-1}, q_{2\nu-1})$ à $(p_{2\nu+1}, q_{2\nu+1})$ (pour nous en tenir au secteur Y), envisagé séparément, peut en outre, c'est possible, contenir des points nombres entiers. Le nombre des parties en lesquels ledit côté est ainsi décomposé, par ces points, est exactement égal à $\mu_{2\nu}$.

Telle est l'interprétation simple des quotients incomplets μ *qui se présentent dans un développement en fraction continue.*

En s'appuyant sur la représentation ci-dessus, l'on a une vue géométrique claire de toutes les propriétés du développement en fraction continue ordinaire et des méthodes analytiques qui en dérivent.

A ce point de vue, je vais ici donner quelques éclaircissements relatifs aux formes quadratiques binaires indéfinies [1].

Soit $f = ax^2 + bxy + cy^2$ une telle forme dont le discriminant $b^2 - 4ac$ n'est pas un nombre carré parfait. Alors $f = 0$ fournit deux valeurs réelles irrationnelles de $\frac{x}{y}$, que je désignerai par ω', ω''. Dans notre système de coordonnées, je mène alors les deux lignes droites considérées, et je construis ce que je nomme les *encadrements polygonaux naturels* correspondants, c'est-à-dire les contours polygonaux à sommets points nombres entiers qui sont chacun renfermés dans les secteurs ayant pour limites ω' et ω''. Chaque polygone de cette nature, envisagé séparément, peut, dans tout son cours, être comparé à une branche complète d'hyperbole (qui s'étend de *deux* côtés à l'infini). L'on peut maintenant affirmer en toute rigueur que *la théorie des formes f, due à Lagrange et Gauss, revient à l'étude de ces polygones,* et nous trouvons que *l'on peut encore, de différentes manières, simplifier cette*

---

[1] Dont les coefficients, bien entendu, sont des nombres entiers.
(*Note du Traducteur.*)

théorie par l'introduction explicite de ces polygones.

Il est en outre avantageux, en s'appuyant sur la *détermination projective de la mesure* « Maasbestimmung » de Cayley [1], de désigner $\sqrt{f}$ comme étant la *distance* du point x, y à l'origine des coordonnées et de parler des *déplacements* correspondants (j'ai fait déjà allusion à ceci dans une Communication de janvier 1893). Je ne poursuivrai pas ce sujet plus longtemps; j'attirerai seulement encore l'attention sur le rôle que joue, dans cette théorie, le développement en fraction continue des racines ω', ω'' [2]. Ici, cela revient à dire : les contours polygonaux dépendant des axes des coordonnées et tirant leur origine des développements en fraction continue, finissent nécessairement, après un nombre fini de côtés, par s'emboîter (ein-münden) en les contours polygonaux *naturels* dont nous venons de parler.

Jusqu'ici, nous avons indiqué seulement une interprétation géométrique ou encore une simplification de méthodes de traitement connues. Mais, ce qui est beau, c'est que notre indication s'étend à des cas plus élevés, non encore traités ainsi. Je considérerai ici par exemple deux types de formes ternaires. Soit $f(xyz)$ une forme quadratique indéfinie, tandis que $F(xyz)$ désignera une forme cubique décomposable en trois facteurs linéaires réels. Je construirai, dans le système habituel de coordonnées, le cône $f=0$ et le triplet de plans $F=0$; je considère alors tous les points nombres entiers ren-

---

(1) CAYLEY, *Sixth Memoir on quantics. Collected math. Papers*, t. II, n° 158 et note *Ibid.*, p. 604. — KLEIN, *Math. Ann.*, t. IV; 1871, et *Bulletin* de M. Darboux, p. 341 : *Sur la Géométrie dite non euclidienne.* (*Note du Traducteur.*)

(2) DIRICHLET-DEDEKIND, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4e édition, p. 174 et suivantes. (*Note du Traducteur.*)

fermés soit dans une moitié du cône $f=0$, ou dans un des demi-quadrants de l'espace (octanten) formés par $F=0$. Il est clair que, pour ces points nombres entiers, on peut, d'une façon analogue, construire un *encadrement polyédral à faces planes*. La considération de cet encadrement polyédral fournit une nouvelle théorie simple des formes f et F. Relativement à F un travail de M. Furtwangler paraîtra bientôt; quant aux formes f, elles seront traitées de la manière indiquée dans un Ouvrage sur les fonctions automorphes que je prépare en collaboration avec M. Fricke.