NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

C. BOURLET

Sur les nombres parfaits

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15 (1896), p. 297-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__297_0>

[125b] SUR LES NOMBRES PARFAITS;

PAR M. C. BOURLET,
Professeur au lycée Henri IV.

J'ai fait le présent Travail sans connaître les travaux qui ont paru sur ce sujet; je savais, seulement, qu'on avait démontré que tous les nombres parfaits pairs étaient compris dans la formule

$$2^n(2^{n+1}-1).$$

C'est en cherchant à retrouver ce résultat, que j'ai été amené à faire cette petite étude.

Vérifications faites, j'avais retrouvé presque toutes les propriétés connues des nombres parfaits. De plus, j'étais amené à augmenter les restrictions dans la recherche des nombres parfaits impairs. Mes démonstrations sont nouvelles, à ce que je crois du moins, et, comme cette étude a été faite d'un seul jet, il y a une certaine unité d'exposition qu'on n'obtient pas lorsqu'on rapproche les démonstrations connues jusqu'à ce jour. Pour ces raisons, j'ai pensé qu'il pouvait être intéressant de publier cette Note.

Comme le dit Édouard Lucas, « l'étude des nombres parfaits semble archaïque, mais il ne faut pas oublier qu'elle a donné naissance aux travaux de Fermat sur l'Arithmétique supérieure ». Un sujet qui a passionné des mathématiciens comme Euclide, Fermat, Descartes, Frenicle, le P. Mersenne et bien d'autres, peut mériter encore quelque attention, ne serait-ce qu'au point de vue historique.

1. On appelle nombre *parfait* un nombre égal à la somme de ses parties aliquotes (c'est-à-dire de ses diviseurs plus petits que lui). Un nombre est dit *abondant* (redundans) ou *déficient* (deficiens) suivant qu'il est plus petit ou plus grand que la somme de ses parties aliquotes.

Dans la suite, nous désignerons toujours par $\sigma(n)$ la somme des diviseurs du nombre n (y compris lui-même). On a donc

$$\begin{aligned} 2n &= \sigma(n) \text{ pour un nombre } \textit{parfait}, \\ 2n &< \sigma(n) \quad \text{» } \quad \textit{abondant}, \\ 2n &> \sigma(n) \quad \text{» } \quad \textit{déficient}. \end{aligned}$$

2. Je rappellerai d'abord quelques propriétés de la somme $\sigma(n)$.

1° Si n, décomposé en facteurs premiers, est égal à $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, on a

$$\sigma(n) = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\,\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\,\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\cdots.$$

2° p et q étant deux nombres *premiers entre eux*, on a

$$\sigma(pq) = \sigma(p)\,\sigma(q).$$

3° a, b, c, ... étant les facteurs premiers distincts du nombre n, on a

$$1 > \frac{n}{\sigma(n)} > \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots.$$

La première inégalité est évidente, car on a évidemment

$$\sigma(n) > n.$$

Pour prouver la seconde, écrivons

$$\sigma(n) = a^\alpha b^\beta c^\gamma \frac{a-\frac{1}{a^\alpha}}{a-1}\,\frac{b-\frac{1}{b^\beta}}{b-1}\,\frac{c-\frac{1}{c^\gamma}}{c-1};$$

on en conclut, sans conteste,

$$\sigma(n) < n \frac{a}{a-1} \frac{b}{b-1} \frac{c}{c-1} \cdots,$$

d'où

$$\frac{n}{\sigma(n)} > \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$$

3. Ces propriétés rappelées, nous établirons, d'abord, quelques propositions générales sur les nombres parfaits, abondants et déficients.

Théorème I. — *Un nombre est abondant, parfait ou déficient suivant que la somme des inverses de ses diviseurs est plus grande que* 2, *égale à* 2, *ou plus petite que* 2.

Soit, en effet, n un nombre et soient

$$1, \quad d_1, \quad d_2, \quad \ldots \quad d_{k-2}, \quad d_{k-1}, \quad n$$

les diviseurs rangés par ordre de grandeur croissante. On a, comme on sait,

$$d_1 d_{k-1} = n, \qquad d_2 d_{k-2} = n, \qquad \ldots;$$

on a donc

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{n} + \frac{d_1}{n} + \frac{d_2}{n} + \ldots + \frac{d_{k-2}}{n} + \frac{d_{k-1}}{n} + 1,$$

ce qui s'écrit, à cause des relations précédentes,

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{d_{k-1}} + \frac{1}{d_{k-2}} + \ldots + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{1}.$$

Or $\frac{\sigma(n)}{n}$ est plus grand que 2, égal à 2 ou plus petit que 2 suivant que le nombre n est abondant, parfait, ou déficient.

Théorème II. — *Tout nombre divisible par un nombre qui n'est pas déficient est abondant.*

Supposons, en effet, que le nombre n admette comme diviseur un nombre p, abondant ou parfait. Soient 1, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{h-1}, p$ les diviseurs de p. On aura, d'après le théorème I,

$$\frac{\sigma(p)}{p} = \frac{1}{1} + \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} + \ldots + \frac{1}{\delta_{h-1}} + \frac{1}{p} \geq 2.$$

Or n, admettant p pour diviseur, admet tous les diviseurs de p. La somme des inverses des diviseurs de n est donc plus grande que la somme des inverses des diviseurs de p, puisqu'elle est égale à cette somme augmentée de la somme des inverses des diviseurs de n qui ne divisent pas p.

On a donc

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(p)}{p}$$

et, par suite, certainement

$$\frac{\sigma(n)}{n} > 2.$$

Corollaires. — *Un nombre parfait ne peut pas être divisible par un nombre parfait, autre que lui-même.*

Un nombre parfait ne peut admettre que des diviseurs déficients autres que lui-même.

Théorème III. — *a, b, c, ... étant les facteurs premiers distincts d'un nombre n qui n'est pas déficient, on a*

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\cdots < \frac{1}{2}.$$

Car, si le nombre n est abondant ou parfait, on a

$$\frac{n}{\sigma(n)} \leq \frac{1}{2}.$$

Or on a aussi (2, 3°)

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots<\frac{n}{\sigma(n)}$$

donc

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots<\frac{1}{2}.$$

Application. — Ce théorème limite la recherche des nombres parfaits ou abondants ayant un nombre *donné* de facteurs premiers distincts.

D'abord, si l'un des facteurs premiers est égal à 2 l'inégalité précédente a toujours lieu. Ceci nous conduira donc, d'abord, à chercher les nombres abondants et parfaits qui sont pairs.

Mais, si aucun facteur premier n'est égal à 2, il n'y aura qu'un nombre limité de combinaisons d'un nombre *donné* de facteurs premiers satisfaisant à l'inégalité. Ainsi :

1° *Parmi les nombres de la forme* $a^\alpha b^\beta$ *il n'y a que les nombres pairs qui puissent être parfaits ou abondants,* car l'inégalité

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)<\frac{1}{2},$$

n'étant pas vérifiée pour $a=3, b=5$, n'est, *a fortiori,* vérifiée pour aucun couple de nombres premiers a, b impairs, puisque, quand on augmente a ou b, l'expression $\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$ augmente.

2° *Parmi les nombres impairs de la forme* $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ *il n'y a que ceux qui admettent l'un des trois groupes suivants de facteurs premiers*

$$3,\ 5,\ 7,$$
$$3,\ 5,\ 11,$$
$$3,\ 5,\ 13,$$

qui puissent être parfaits ou abondants.

En effet, a, b, c doivent vérifier l'inégalité

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{1}{2}.$$

Comme on a

$$\left(1-\frac{1}{5}\right)^3>\frac{1}{2},$$

il faut, nécessairement, qu'un des facteurs soit plus petit que 5, donc égal à 3. Soit $a=3$; on aura, pour b et c,

$$\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{1}{2},$$

$$\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{3}{4}.$$

Or on a

$$\left(1-\frac{1}{11}\right)^2>\frac{3}{4}.$$

L'un des facteurs b ou c doit donc être plus petit que 11, donc égal à 5 ou 7. Soit $b=5$, on devra avoir

$$\frac{4}{5}\left(1-\frac{1}{c}\right)<\frac{3}{4},$$

ce qui donne

$$c<16,$$

et c ne peut prendre que les valeurs 7, 11 ou 13.

Si l'on prenait $b=7$, on trouverait qu'on doit avoir $c<8$, ce qui donnerait $c=5$ et l'on retrouverait la combinaison 3, 5, 7.

3° Si, en suivant la même marche, on cherchait à déterminer toutes les combinaisons de 4 nombres premiers impairs a, b, c, d, ... vérifiant l'inégalité

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{d}\right)<\frac{1}{2},$$

on trouverait un nombre *limité* mais *considérable* de combinaisons possibles. Il en serait de même si l'on

prenait un nombre plus grand de facteurs premiers distincts.

4. Théorème IV. — *Tout nombre de la forme* a^{α}, *a étant premier, est déficient.*

On a, en effet,

$$\sigma(a^{\alpha}) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

et l'on a, évidemment,

$$2a^{\alpha} > \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

ou

$$2a^{\alpha+1} - 2a^{\alpha} > a^{\alpha+1} - 1,$$

ou encore

$$a^{\alpha+1} > 2a^{\alpha} - 1.$$

Car, a étant un nombre premier,

$$a \geq 2,$$

donc

$$a^{\alpha+1} \geq 2a^{\alpha},$$

et, par suite,

$$a^{\alpha+1} > 2a^{\alpha} - 1.$$

Corollaire. — *Il n'y a pas de nombre parfait n'admettant qu'un facteur premier.*

Théorème V. — *Tous les nombres parfaits ou abondants de la forme* $a^{\alpha}b^{\beta}$ *sont pairs et, de plus :*

1° *Ceux qui sont parfaits sont de la forme*

$$2^{n}(2^{n+1} - 1),$$

$2^{n+1} - 1$ *étant premier absolu;*

2° *Ceux qui sont abondants sont de la forme*

$$2^{n}a^{\alpha},$$

a *étant premier absolu et au plus égal à* $2^{n+1} - 1$.

La première partie de cette proposition résulte d'une Remarque faite plus haut (3, *App.*).

Nous n'avons donc qu'à rechercher les nombres parfaits ou abondants de la forme

$$2^n a^\alpha.$$

Or

$$\sigma(2^n a^\alpha) = (2^{n+1} - 1)\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1},$$

et, pour que le nombre ne soit pas déficient, il faut avoir

$$2^{n+1} a^\alpha \leqq (2^{n+1} - 1)\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}$$

ou

$$a^{\alpha+1} - 2^{n+1} a^\alpha + 2^{n+1} - 1 \leqq 0.$$

Considérons, maintenant, le polynome entier

$$\varphi(x) = x^{\alpha+1} - 2^{n+1} x^\alpha + (2^{n+1} - 1).$$

Remarquons que ce polynome, n'ayant que 2 variations, ne peut avoir au plus que 2 racines positives. Or, ces 2 racines existent et sont faciles à séparer. L'une de ces racines est d'abord, évidemment, $x = 1$, puisque

$$\varphi(1) = 0.$$

L'autre est comprise entre $2^{n+1} - 1$ et 2^{n+1}.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\varphi(2^{n+1} - 1) &= -(2^{n+1} - 1)^\alpha + (2^{n+1} - 1) \\ &= -(2^{n+1} - 1)[(2^{n+1} - 1)^{\alpha-1} - 1].\end{aligned}$$

La quantité entre crochets est positive; sauf dans le cas où $\alpha = 1$, où elle est nulle. On a donc

$$\varphi(2^{n+1} - 1) \leqq 0.$$

D'ailleurs,

$$\varphi(2^{n+1}) = 2^{n+1} - 1 > 0.$$

On en conclut que l'équation

$$\varphi(x) = 0$$

a une racine positive x' telle que

$$2^{n+1} - 1 \leqq x' < 2^{n+1}.$$

Puisque $\varphi(x)$ ne s'annule que pour les deux valeurs 1 et x', il en résulte que :

1° Le nombre $2^n a^\alpha$ ne peut être parfait que si l'on a

$$a = x',$$

et, comme a est un nombre *entier* et *premier*, ceci ne peut arriver que si

$$x' = 2^{n+1} - 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha = 1.$$

Les seuls nombres parfaits, admettant 2 facteurs premiers distincts, sont donc de la forme

$$2^n(2^{n+1} - 1),$$

où $(2^{n+1} - 1)$ est premier absolu.

2° Le nombre $2^n a^\alpha$ ne peut être *abondant* que si

$$a < x'.$$

Comme a est un nombre entier ceci ne peut arriver que si

$$a \leqq 2^{n+1} - 1.$$

Théorème VI. — *Tous les nombres parfaits pairs sont compris dans la formule*

$$2^n(2^{n+1} - 1),$$

où $(2^{n+1} - 1)$ *est premier absolu.*

Soit, en effet, $2^n B$ un nombre pair, B étant un nombre impair premier ou non.

2^n et B étant premiers entre eux, on a (2, 2°)

$$\sigma(2^n B) = \sigma(2^n)\sigma(B) = (2^{n+1} - 1)\sigma(B).$$

Pour que le nombre $2^n B$ soit parfait, il faut donc avoir

$$2^{n+1} B = (2^{n+1} - 1)\sigma(B).$$

De cette égalité on conclut d'abord que $2^{n+1} - 1$ doit être premier. Car si $2^{n+1} - 1$ admettait un diviseur premier a, plus petit que lui, ce diviseur diviserait B (car il ne peut diviser 2^{n+1}, qui est premier, avec $2^{n+1} - 1$). Le nombre $2^n B$ admettrait, alors, le diviseur $2^n a$, qui est abondant, d'après le théorème V, et $2^n B$ serait lui-même abondant, d'après le théorème II. $(2^{n+1} - 1)$, étant premier, divise B. Le nombre $2^n B$ admet, alors, le diviseur $2^n(2^{n+1} - 1)$ qui est *parfait*, d'après le théorème V. Par suite, le nombre $2^n B$ est égal à son diviseur $2^n(2^{n+1} - 1)$, car, d'après le théorème II et son corollaire, un nombre parfait ne peut admettre d'autre diviseur parfait que lui-même.

5. Résumé. — De ce qui précède il résulte que la formule

$$2^n(2^{n+1} - 1),$$

où $(2^{n+1} - 1)$ est premier, comprend tous *les nombres parfaits pairs et tous ceux qui admettent moins de trois facteurs premiers distincts*.

S'il existe donc des nombres parfaits non compris dans cette formule, ces nombres sont, nécessairement, impairs et admettent au moins trois facteurs premiers distincts.

Jusqu'ici, on n'a pas trouvé d'exemple de nombre parfait impair. Nous allons encore montrer qu'il ne peut pas exister de nombre parfait de la forme

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Il faudra donc chercher les nombres parfaits impairs,

s'il en existe, parmi les nombres admettant au moins *quatre* facteurs premiers distincts (¹).

6. Théorème VII. — *Tous les nombres parfaits impairs, s'il en existe, sont de la forme*

$$(4k+1)^{4\mu+1}\mathrm{A}^2,$$

où $4k+1$ *désigne un nombre premier et* A *un nombre non divisible par* $4k+1$ (²).

Soit, en effet, $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ un nombre parfait impair, on devra avoir

$$2a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots = \sigma(a^\alpha)\times\sigma(b^\beta)\times\sigma(c^\gamma)\times\ldots;$$

le premier membre étant *simplement* pair, *un seul* des facteurs $\sigma(a^\alpha)$, $\sigma(b^\beta)$, ... doit être pair. Supposons que ce soit le premier, on devra avoir

$$\sigma(a^\alpha) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha = \textit{mult. de } 2;$$

a étant impair, ceci nécessite d'abord que α soit impair

$$\alpha = 2\alpha' + 1,$$

et l'on aura

$$\sigma(a^\alpha) = (a+1)(a^{2\alpha'} + a^{2\alpha'-2} + \ldots + a^2 + 1).$$

Mais, $\sigma(a^\alpha)$ devant être *simplement* pair, $a+1$ doit être simplement pair et le second facteur impair, ce qui entraîne

$$a = 4k+1, \qquad \alpha' = 2\mu, \qquad \alpha = 4\mu+1.$$

D'ailleurs, tous les autres facteurs $\sigma(b^\beta)$, $\sigma(c^\gamma)$, ...

(¹) Cette proposition se trouve énoncée comme exemple (n° 229, Exemple VII) dans la *Théorie des nombres* d'Édouard Lucas.

(²) Cette proposition a été énoncée par Lionnet dans les *Nouvelles Annales de Mathematiques* (1879, p. 306) et démontrée par Lucas dans sa *Théorie des nombres* (t. I).

doivent être impairs, ce qui nécessite que les exposants $\beta, \gamma, \ldots$ soient pairs. Le produit $b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$ est donc un carré parfait A^2 et le nombre est de la forme annoncée.

Remarque. — Il résulte de là que si un nombre parfait impair admet un facteur premier qui n'est pas de la forme $4k+1$, l'exposant de ce facteur est nécessairement pair.

THÉORÈME VIII. — *Il n'existe aucun nombre parfait de la forme* $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$, a, b, c *étant premiers.*

D'après la remarque faite au n° 3 (*Application*), il ne peut y avoir que les nombres admettant l'un des trois groupes

$$3,\ 5,\ 7,$$
$$3,\ 5,\ 11,$$
$$3,\ 5,\ 13$$

comme facteurs premiers, qui puissent être parfaits.

1° Prenons le groupe 3, 5, 7. Nous remarquerons, d'abord, que le nombre $3^3 \times 5 \times 7$ est abondant (1). Il suffit de le vérifier. Si donc un nombre parfait admet les diviseurs 3, 5 et 7, il contient le facteur 3 à un exposant inférieur à 3; car, sans cela, il serait divisible par le nombre abondant $3^3 \times 5 \times 7$ et serait abondant.

D'ailleurs, d'après la remarque précédente, il devrait contenir 3 à une puissance paire et, par suite, con-

---

(1) Je relève, en passant, une faute d'impression dans la *Théorie des nombres* d'ÉDOUARD LUCAS : on trouve dans le tome I, p. 380, l'exemple V qui propose de démontrer que

$$3^3 \times 5 \times 79$$

est le plus petit des nombres abondants impairs.

Il faut, évidemment, lire

$$3^3 \times 5 \times 7.$$

tiendrait 3 à la puissance 2. Mais, alors, il serait divisible par

$$\sigma(3^2) = 13,$$

ce qui n'est pas possible, s'il n'a que les trois facteurs 3, 5 et 7.

Ceci nous prouve, en passant, qu'*il ne peut exister aucun nombre parfait admettant à la fois les facteurs premiers* 3, 5 *et* 7. Car, d'après ce qui précède, ce nombre admettrait encore le facteur 13, par suite, serait divisible par

$$3^2 \times 5 \times 7 \times 13,$$

qui est un nombre abondant, comme il est facile de le vérifier.

2° Considérons le groupe 3, 5, 11. Nous remarquerons encore que le nombre $3^3 \times 5^2 \times 11$ est abondant. On voit d'abord qu'un nombre parfait, admettant seulement les facteurs 3, 5 et 11, ne peut admettre le facteur 5 à une puissance supérieure à 2; car, alors, il devrait admettre le facteur 3 à la puissance 2 (pour ne pas être divisible par le nombre abondant $3^3 \times 5^2 \times 11$) et serait divisible par $\sigma(3^2) = 13$.

Le nombre cherché, s'il existe, ne peut donc être que de la forme

$$5 \times 3^{2\alpha} \times 11^{2\beta} \qquad \text{(en vertu du th. VII)}$$

et l'on devrait avoir l'égalité

$$2^2 \times 5^2 \times 3^{2\alpha-1} \times 11^{2\beta} = (3^{2\alpha+1} - 1)(11^{2\beta+1} - 1).$$

Or, cette égalité est impossible; car, le premier membre étant divisible par 3, il faudrait que $(11^{2\beta+1} - 1)$ soit divisible par 3. Ceci n'est pas, car la plus petite puissance de 11, qui donne 1 pour reste de division par 3, est 11^2 et, par suite, d'après la loi de périodicité des restes des divisions des puissances d'un nombre par

un diviseur premier avec lui, il n'y a que des puissances paires de 11 qui donnent 1 pour reste de division par 3.

3° Prenons, enfin, le dernier groupe 3, 5, 13. D'abord, d'après la remarque qui suit le théorème VII, 3 devra figurer avec un exposant pair. Le nombre parfait, s'il existe, est donc de la forme

$$3^{2\alpha}\times 5^{\beta}\times 13^{\gamma},$$

et l'on devrait avoir l'égalité

$$2^{6}\times 3^{2\alpha+1}\times 5^{\beta}\times 13^{\gamma}=(3^{2\alpha+1}-1)(5^{\beta+1}-1)(13^{\gamma+1}-1).$$

5 ne peut pas diviser le facteur $(3^{2\alpha+1}-1)$, car la plus petite puissance de 3, qui donne 1 pour reste de division par 5, est 3^{4}; une puissance impaire de 3 ne peut donc donner 1 pour reste de division par 5. Le facteur 5, qui figure dans le premier membre, devrait donc diviser $(13^{\gamma+1}-1)$. Or, la plus petite puissance de 13, qui donne 1 pour reste de division par 5, est 13^{4}. Le second membre de l'égalité devrait être divisible par

$$13^{4}-1=2^{4}\times 5\times 3\times 7\times 17,$$

ce qui est impossible, puisque les facteurs 7 et 17 ne figurent pas dans le premier membre.

Ceci nous montre, en passant, qu'*un nombre parfait, qui admet les facteurs* 3 *et* 5, *ne peut admettre le facteur* 13 *à une puissance impaire;* car, sans cela, il admettrait le facteur 7 qui divise $13^{2}-1$ et, par suite, admettrait, à la fois, les facteurs 3, 5 et 7, ce qui n'est pas possible.

7. La recherche des nombres parfaits impairs est donc circonscrite à celle des nombres impairs admettant, au moins, quatre facteurs premiers distincts. Cette re-

cherche peut encore être restreinte, lorsqu'on connaît des nombres abondants.

Ainsi, nous avons déjà vu qu'un nombre parfait ne peut admettre *à la fois* les facteurs premiers 3, 5 et 7. En remarquant que les nombres :

$$3^2 \times 5 \times 11 \times 13,$$
$$3^2 \times 5 \times 11 \times 17,$$
$$3^2 \times 5 \times 11^2 \times 19^2$$

sont abondants; on en conclut, immédiatement, qu'*un nombre parfait impair ne peut admettre à la fois les facteurs*

$$3,\quad 5,\quad 11,\quad 13$$

ou

$$3,\quad 5,\quad 11,\quad 17$$

ou encore

$$3,\quad 5,\quad 11,\quad 19$$

Le nombre

$$17 \times 5^2 \times 3^2 \times 13^2$$

étant abondant, et un nombre parfait ne pouvant admettre le facteur 13 qu'à une puissance paire, un nombre parfait ne peut admettre les facteurs 5, 3, 13 et 17, sans que 5 soit à la puissance 1 et 17 à une puissance paire.

On pourrait multiplier les exemples de cette nature.

De ce qui précède, il résulte, évidemment, que tout nombre parfait impair est certainement plus grand que le nombre

$$5 \times 3^2 \times 13^2 \times 17^2 = 2197845;$$

on voit, par suite, que, s'il existe des nombres parfaits impairs, ces nombres sont très grands.

On peut assurer que, dans les deux premiers millions

de nombres entiers, il n'y a pas d'autres nombres parfaits que les nombres pairs.

Ceci suffit à montrer la difficulté qu'il peut y avoir à trouver des nombres parfaits impairs, *s'il en existe*.