

M. D'OCAGNE

Sur les cordes normales de la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15
(1896), p. 274-281

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__274_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'10b, L'10c]

SUR LES CORDES NORMALES DE LA PARABOLE;

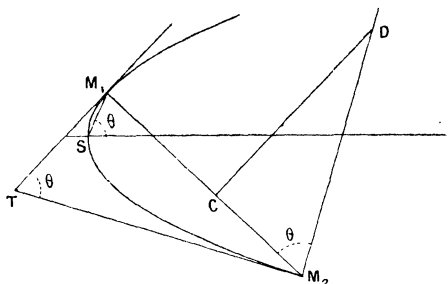
PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Soit M_1M_2 une corde d'une parabole que nous supposons normale en M_1 à cette courbe. Proposons-nous d'abord de voir comment les coordonnées x_2 et y_2 du point M_2 sont liées aux coordonnées x_1 et y_1 du point M_1 .

La parabole étant supposée rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, on a

$$(1) \quad y_1^2 = 2px_1,$$

$$(2) \quad y_2^2 = 2px_2.$$



Le point (x_2, y_2) étant sur la normale en (x_1, y_1) , on a, en outre,

$$(3) \quad p(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) = 0.$$

Éliminant x_1 et x_2 entre ces trois équations, on a

$$(y_2^2 - y_1^2) \frac{y_1}{2p} + p(y_2 - y_1) = 0,$$

ou, en supprimant la solution $y_2 - y_1 = 0$ qui donne le point M_1 ,

$$(y_2 + y_1) \frac{y_1}{2p} + p = 0,$$

d'où

$$(4) \quad y_2 = -\frac{y_1^2 + 2p^2}{y_1},$$

ou, eu égard à (1),

$$(4') \quad y_2 = -\frac{2p(x_1 + p)}{y_1}.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{y_2}{2p} = -\frac{x_1 + p}{y_1},$$

ou, en vertu de (2),

$$\frac{x_2}{y_2} = -\frac{x_1 + p}{y_1};$$

d'où, en remplaçant y_2 par sa valeur tirée de (4'),

$$(5) \quad x_2 = \frac{2p(x_1 + p)^2}{y_1^2},$$

ou, eu égard à (1),

$$(5') \quad x_2 = \frac{(x_1 + p)^2}{x_1}.$$

2. Calculons maintenant l'angle θ que font les tangentes en M_1 et en M_2 à la parabole. Ces tangentes faisant avec l'axe de la courbe des angles dont les tangentes sont respectivement $\frac{p}{y_1}$ et $\frac{p}{y_2}$, ou a

$$\text{tang } \theta = \frac{\frac{p}{y_1} - \frac{p}{y_2}}{1 + \frac{p^2}{y_1 y_2}} = \frac{p(y_2 - y_1)}{y_1 y_2 + p^2}.$$

Or, la formule (4') donne

$$y_2 - y_1 = -\frac{2p(x_1 + p)}{y_1} - y_1 = -\frac{2px_1 + 2p^2 + y_1^2}{y_1},$$

ou, eu égard à (1),

$$y_2 - y_1 = -\frac{2p(2x_1 + p)}{y_1}$$

et

$$y_1 y_2 + p^2 = -2p(x_1 + p) + p^2 = -p(2x_1 + p).$$

Donc

$$(6) \quad \text{tang } \theta = \frac{2p}{y_1}.$$

Remarquons qu'en vertu de (1) cette formule peut s'écrire

$$(6') \quad \text{tang } \theta = \frac{y_1}{x_1},$$

ce qui montre que *l'angle des tangentes en M₁ et M₂ à la parabole est égal à l'inclinaison sur l'axe de la droite qui joint le point M₁ au sommet.*

3. Cherchons la longueur l de la corde M₁M₂. Nous avons

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

ou, en vertu des formules (4) et (5'),

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\left[x_1 - \frac{(x_1 + p)^2}{x_1} \right]^2 + \left[y_1 + \frac{y_1^2 + 2p^2}{y_1} \right]^2} \\ &= \sqrt{\frac{p^2(2x_1 + p)^2}{x_1^2} + \frac{(y_1^2 + p^2)^2}{y_1^2}}, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (1),

$$l = (2x_1 + p) \sqrt{\frac{p^2}{x_1^2} + \frac{2p}{x_1}} = \frac{2x_1 + p}{x_1} \sqrt{p^2 + y_1^2},$$

ou encore

$$(7) \quad l = \frac{(p^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{px_1}.$$

Si l'on rapproche cette formule de l'expression connue du rayon de courbure R en M₁,

$$R = \frac{(p^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

on arrive à cette curieuse relation

$$(8) \quad \frac{R}{l} = \frac{x_1}{p}.$$

Le rapport du rayon de courbure en M_1 à la corde normale correspondant à ce point est égal au rapport de l'abscisse du point M_1 au paramètre.

4. A titre d'applications des formules précédentes, nous allons traiter divers problèmes de minimum relatifs aux cordes normales de la parabole. D'abord celui-ci :

Trouver la corde normale de longueur minimum ?

Si la normale en M_2 à la parabole coupe en D la perpendiculaire élevée à $M_1 M_2$ par le centre de courbure C , c'est-à-dire la normale à la développée, on a, d'après une formule connue, en appelant ε l'angle de contingence en M_1 ,

$$dI = CD \cdot \varepsilon.$$

Pour la corde minimum, on doit donc avoir

$$CD = 0.$$

Or, la normale en M_2 ne pouvant coïncider avec la normale $M_1 M_2$ en M_1 , CD ne peut être nul que si le point C coïncide avec le point M_2 ⁽¹⁾, c'est-à-dire si $R = l$. La formule (8) donne, dès lors,

$$x_1 = p.$$

Le point M_1 correspondant a pour abscisse le para-

(¹) Cette propriété est, on le voit, absolument générale. Elle peut s'énoncer ainsi : *Si la normale en M_1 à une courbe quelconque rencontre, en outre, cette courbe au point M_2 , le segment $M_1 M_2$ est minimum si le point M_1 est un des points de rencontre de la courbe et de sa développée.*

mètre. Autrement dit : *Le point M_1 se trouve sur la perpendiculaire à l'axe menée par le centre de courbure répondant au sommet.*

§. Résolvons maintenant cet autre problème :

Trouver la corde normale qui détache sur la parabole l'arc de longueur minimum ?

En appelant $d\sigma$ la différentielle de cet arc, ds_1 et ds_2 les différentielles des arcs comptés d'une origine quelconque aux points M_1 et M_2 , on a

$$\begin{aligned} d\sigma &= ds_1 - ds_2 \\ &= (M_1 C - M_2 D) \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour l'arc minimum, on doit avoir

$$M_1 C = M_2 D,$$

ou, puisque l'angle $CM_2 D$ est égal à l'angle $M_1 T M_2$, ou θ , comme ayant ses côtés perpendiculaires,

$$R = \frac{l - R}{\cos \theta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{l - R}{R} = \cos \theta.$$

Tirant la valeur de $\frac{l - R}{R}$ de la formule (8), celle de $\cos \theta$ de la formule (6), on a

$$\frac{p - x_1}{x_1} = \frac{\gamma_1}{\sqrt{4p^2 + \gamma_1^2}},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$\frac{(p - x_1)^2}{x_1^2} = \frac{x_1}{2p + x_1}.$$

Toutes réductions faites, cette équation devient

$$3x_1 - 2p = 0,$$

d'où

$$x_1 = \frac{2}{3}p.$$

Le point M_1 correspondant à pour abscisse les $\frac{2}{3}$ du paramètre.

La formule (1) donne

$$y_1 = \frac{2p}{\sqrt{3}},$$

puis la formule (6)

$$\tan \theta = \sqrt{3}.$$

Dans ce cas, l'angle θ est égal à 60° . On peut donc dire, puisque l'angle $M_1 M_2 T$, sous lequel la corde $M_1 M_2$ coupe la parabole en M_2 , est le complément de θ , que *la corde normale détachant sur la parabole l'arc de longueur minimum rencontre la courbe sous un angle de 30° .*

En vertu de la remarque qui termine le n° 2, on voit aussi que, dans ce cas, *la droite joignant le point M_1 au sommet est inclinée à 60° sur l'axe.*

6. Occupons-nous enfin de ce problème :

Trouver la corde normale qui détermine, avec la parabole, le segment d'aire minimum.

Si Σ est cette aire, on a, en appelant $M'_1 M'_2$ la corde normale infiniment voisine, qui passe (aux infiniment petits d'ordre supérieur près) par le centre de courbure C ,

$$\begin{aligned} d\Sigma &= \text{aire } M_1 M_2 C - \text{aire } M'_1 M'_2 C \\ &= \frac{1}{2} (\overline{CM_1}^2 - \overline{CM_2}^2) \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour le segment d'aire minimum,

$$CM_1 = CM_2,$$

ou

$$l = 2 R.$$

Dès lors, la formule (8) donne

$$x_1 = \frac{p}{2},$$

ce qui montre que *le point M₁ est sur la perpendiculaire menée à l'axe par le foyer.*

Nous retrouvons ainsi un théorème que nous avons, dans une précédente Note (1), obtenu par une tout autre voie.
