

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 15
(1896), p. 196-199

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__196_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1896, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1668.

(1894, p. 3*).

Étant donnée une parabole de sommet O et de foyer F, on trace une corde focale AB. Le cercle circonscrit au triangle OAB rencontre l'axe de la parabole en un point P, tel que $FP = AB$. (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Soit $r = \frac{P}{1 - \cos \varphi}$ l'équation polaire de la parabole.

On aura $FA = \frac{P}{1 - \cos \varphi}$; $FB = \frac{P}{1 - \cos(180 + \varphi)} = \frac{P}{1 + \cos \varphi}$.

$$\text{Donc } AB = FA + FB = \frac{2p}{\sin^2 \varphi}, \quad FA \cdot FB = \frac{p^2}{\sin^2 \varphi}.$$

Or

$$FO \cdot FP = FA \cdot FB,$$

d'où

$$FP = \frac{p^2}{\sin^2 \varphi} : \frac{p}{2} = \frac{2p}{\sin^2 \varphi}, \quad FP = AB.$$

On nous a adressé aussi la solution suivante :

On sait que *quelle que soit la corde focale on a*

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \text{const.}$$

Si l'on prend l'axe comme corde, on voit que la constante est

$$\frac{1}{FO}; \text{ on a alors } \frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{1}{FO},$$

d'où $(FA + FB) FO = FA \times FB$, donc, etc.

Question 1669.

(1894, p. 37).

Par le foyer F d'une parabole, on mène une corde AB et l'on décrit sur AB comme diamètre une circonférence Σ qui rencontre la parabole en deux autres points C et D. On porte sur FC, du côté opposé à C, une longueur $FD' = FD$ et sur FD, du côté opposé à D, une longueur $FC' = FC$. Montrer que les points C' et D' sont situés sur la circonférence Σ . (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

Une circonférence quelconque de centre L a pour équation polaire

$$\rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \alpha) + a^2 - r^2 = 0,$$

a et α étant les coordonnées polaires du centre L.

En choisissant le foyer F comme origine et l'axe de la parabole comme axe polaire, la circonférence AB aura pour équations

$$\rho^2 - \rho \frac{2p \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cos(\varphi - \alpha) + \frac{p^2 \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} - \frac{p^2}{\sin^4 \alpha} = 0,$$

ou

$$\rho^2 - \rho \frac{2p \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \cos(\varphi - \alpha) - \frac{p^2}{\sin^2 \alpha} = 0,$$

car

$$AB = \frac{2p}{\sin^2 \alpha} \quad \text{et} \quad A = \frac{FA - FB}{2} = \frac{p \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \quad (1).$$

Éliminons φ entre l'équation du cercle et l'équation de la parabole $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$.

De cette dernière, on déduit

$$\cos \varphi = \frac{\rho - p}{p} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \sqrt{\frac{\rho^2 - (\rho - p)^2}{p^2}}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation du cercle développée, elle devient

$$\begin{aligned} \rho^2 \sin^2 \alpha - 2\rho p \cos \alpha (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) - p^2 &= 0, \\ \rho^2 \sin^2 \alpha - 2\rho p \cos^2 \alpha \frac{\rho - p}{p} - 2\rho p \cos \alpha \sin \alpha \sqrt{\frac{\rho^2 - (\rho - p)^2}{p^2}} - p^2 &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\rho^2 \sin^2 \alpha - 2p \cos^2 \alpha (\rho - p) - p^2 = p \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\rho^2 - (\rho - p)^2}.$$

Cette équation, élevée au carré, fournit

$$\rho^4 \sin^4 \alpha + \rho^3 () + \dots + p^4 = 0,$$

d'où

$$FA.FB.FC.FD = \frac{p^4}{\sin^4 \alpha}.$$

Or

$$FA.FB = \frac{p^2}{\sin^2 \varphi}.$$

Donc

$$FC.FD = FA.FB,$$

et, par conséquent,

$$FA.FB = FC.FC' = FD.FD'.$$

Question 1670.

(1894, p. 3°.)

Étant donnés trois points A, B, C sur une courbe quelconque, soient A' le pôle de BC, B' le pôle de AC, et C' le

(1) Voir la solution de la question 1668 (p. 196 ci-dessus)

pôle de AB. Lorsque les points A, B, C se réunissent en un seul A, on a

$$\lim \left(\frac{A'B' \cdot A'C' \cdot B'C'}{\text{surface } A'B'C'} \right) = R,$$

R étant le rayon du cercle osculateur en A.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. G. TZITZÉICA.

Soit R' le rayon du cercle circonscrit à A'B'C'. On a

$$A'B' + B'C' + C'A' = 4R' + \text{surface } A'B'C'.$$

Il reste à montrer que

$$(1) \quad \lim R' = \frac{R}{4}.$$

Je considère les coniques qui passent par A, B, C, c'est-à-dire qui ont à la limite avec la courbe donnée un contact du second ordre.

Il est évident qu'elles sont inscrites dans le triangle infinitésimal A'B'C'. Spécialement, les foyers des paraboles circonscrites à ABC se trouvent sur le cercle circonscrit à A'B'C'. Alors la limite de R' est le rayon du cercle, lieu des foyers des paraboles ayant en A un contact du second ordre avec la courbe considérée. Or, le rayon de ce dernier cercle est, comme on sait ⁽¹⁾, $\frac{R}{4}$. L'égalité (1) est par conséquent démontrée.