

ALFREDO CAPELLI

**Sur les déterminants dont les éléments
principaux varient en progression
arithmétique**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 62-63

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__62_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES DÉTERMINANTS DONT LES ÉLÉMENTS PRINCIPAUX
VARIANT EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE;**

PAR M. ALFREDO CAPELLI, à Naples.

Les déterminants dont les éléments principaux varient en progression arithmétique sont de la forme

$$F(z, y) = \begin{vmatrix} a_{11} + z & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + z + y & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + z + 2y & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} + z + (n-1)y \end{vmatrix}.$$

Ils dépendent de deux variables z et y ; mais ils peuvent toujours se développer, d'une façon très simple, à l'aide de déterminants qui jouissent de la même propriété et ne dépendent que de la variable y . On a, en effet, l'identité suivante

$$(1) \quad \left. \begin{aligned} F(z, y) &= z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-1)y] \\ &+ z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-2)y] \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} \\ &+ z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-3)y] \sum_{i < j \leq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} + y \end{vmatrix} \\ &+ z(z+y)(z+2y)\dots[z+(n-4)y] \\ &\times \sum_{i < j < h \leq n} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ih} \\ a_{ji} & a_{jj} + y & a_{jh} \\ a_{hi} & a_{hj} & a_{hh} + 2y \end{vmatrix} + \dots \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + y & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} + (n-1)y \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\}$$

Dans le second membre de cette identité, chaque somme doit s'étendre à tous les systèmes de valeurs des indices $i, j, h, \dots$ qui satisfont à l'inégalité qu'on voit au-dessous du signe $\sum$.

Ainsi, par exemple, on aura, pour $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + z + y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + z + 2y \end{vmatrix} \\ = z(z+y)(z+2y) + z(z+y)(a_{11} + a_{22} + a_{33}) \\ + z \left\{ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} + y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} + y \end{vmatrix} \right\} \\ + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + 2y \end{vmatrix}.$$

L'identité (1) se déduit facilement d'une identité que j'ai établie par des considérations empruntées à la théorie des opérations invariantes (voir *Rendiconti dell' Accademia delle Scienze di Napoli*; marzo 1889). Ce ne serait donc pas sans intérêt si l'on pouvait donner une démonstration directe de cette formule.