

D. SINTSOF

Note sur l'équation différentielle des surfaces réglées

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 58-61

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__58_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES SURFACES
RÉGLÉES;**

PAR M. D. SINTSOF,
Agrégré de l'Université, à Kasan.

C'est une forme nouvelle de ladite équation que je
veux établir dans ce qui suit. Sous forme fixée une sur-

face réglée peut être déterminée par deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} z = ax + \alpha, \\ y = bx + \beta, \end{cases}$$

dont les coefficients sont des fonctions quelconques d'un paramètre variable θ . La seconde de ces équations en donne la valeur en fonction de x et de y , que l'on porte dans la première et reçoit ainsi l'équation explicite de la surface. On peut donc différentier les équations (1) en y comptant θ fonction de x et de y , ce qui donne

$$\begin{aligned} p &= a + \theta'_x (xa'_\theta + \alpha'_\theta), & q &= (xa'_\theta + \alpha'_\theta)\theta'_y, \\ 0 &= b + \theta'_x (xb'_\theta + \beta'_\theta), & 1 &= (xb'_\theta + \beta'_\theta)\theta'_y; \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $xa'_\theta + \alpha'_\theta$ et $xb'_\theta + \beta'_\theta$,

$$(2') \quad p = a + \frac{\theta'_x}{\theta'_y} q,$$

$$(2'') \quad 0 = b + \frac{\theta'_x}{\theta'_y};$$

et enfin

$$(3) \quad p = a - bq.$$

Différentions (3) encore une fois par rapport à x et y , et posons comme à l'ordinaire $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \dots$,

$$\begin{aligned} bs + r &= (a'_\theta - qb'_\theta)\theta'_x, \\ bt + s &= (a'_\theta - qb'_\theta)\theta'_y, \\ \frac{bs + r}{bt + s} &= \frac{\theta'_x}{\theta'_y} = -b, \end{aligned}$$

d'après (2''), c'est-à-dire

$$(4) \quad tb^2 + 2sb + r = 0.$$

Différentions de nouveau (4), et posons pour abréger

l'écriture $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = k$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = l$, ..., nous aurons

$$\begin{aligned} 2(bt + s)b'_0\theta'_x &= -(b^2m + 2bl + k), \\ 2(bt + s)b'_0\theta'_y &= -(b^2n + 2bm + l), \\ \frac{b^2m + 2bl + k}{b^2n + 2bm + l} &= \frac{\theta'_x}{\theta'_y} = -b, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad nb^3 + 3mb^2 + 3lb + k = 0.$$

C'est à l'aide de ces équations (4) et (5) que l'on définit ordinairement, depuis Monge, l'équation différentielle des surfaces réglées.

Remarquons d'abord que, symboliquement, on peut écrire (4) et (5) ainsi :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \dots$$

Formons les combinaisons

$$(6) \quad \frac{1}{b} [r(5) - k(4)] = 0 = (3rl - 2sk) + (3rm - tk)b + rnb^2,$$

$$(7) \quad t(5) - nb(4) = 0 = tk + (3tl - rn)b + (3tm - 2sn)fr.$$

En éliminant des équations (4), (6) et (7), linéaires en b et b^2 , ces quantités, nous avons l'équation sous forme d'un déterminant :

$$(8) \quad 0 = \begin{vmatrix} r & 2s & t \\ 3rl - 2sk & 3rm - tk & rn \\ tk & 3tl - rn & 3tm - 2sn \end{vmatrix},$$

ou

$$(8') \quad \begin{cases} t^3k^2 + qrt^2l^2 + qr^2tm^2 + r^3n^2 \\ - 6s(t^2kl + 3rtlm + r^2mn) + 6s^2(tkm + rln) \\ - 2s^3kn - 6(rt - s^2)(rln - 3nk + tkm) = 0. \end{cases}$$

Pour lui donner une forme plus symétrique, remarquons que les surfaces développables sont un cas particulier des surfaces réglées; l'équation différentielle de ces dernières doit donc être satisfaite en vertu de l'équation $rt - 2s^2 = 0$ et de ses dérivées par rapport à x et y :

$$(9') \quad kt - 2sl + rm = 0,$$

$$(9'') \quad tl - 2sm + rn = 0.$$

Le premier membre de l'équation (8') doit donc s'annuler avec $\Delta = rt - s^2$, $\frac{\partial \Delta}{\partial x}$ et $\frac{\partial \Delta}{\partial y}$, ce qui nous donne l'idée de le présenter à l'aide de ces trois quantités. En remarquant que nous avons un terme $t^3 x^2$ qui peut provenir de $t \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} \right)^2$ et un autre $r^3 n^2 = r(rn)^2$, qui vient de $r \left(\frac{\partial \Delta}{\partial y} \right)^2$, nous recevons par un calcul facile la forme suivante de l'équation considérée :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & t \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} \right)^2 - 2s \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Delta}{\partial y} \right) + r \left(\frac{\partial \Delta}{\partial y} \right)^2 \\ & = \Delta \begin{vmatrix} r & s & t \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix} . \end{aligned} \right.$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{vmatrix}$$

s'annule aussi en vertu de $\Delta = 0$, $\frac{\partial \Delta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0$. C'est l'équation (10) que nous avons voulu donner dans cette Note.