

ROMUALD BLAZEIEVSKI

Sur un problème de géométrie plane

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 14
(1895), p. 49-55

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1895_3_14__49_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE PLANE ⁽¹⁾;

PAR M. ROMUALD BLAZEIEVSKI.

Nous avons les équations de trois hyperboles

$$m_1 x_1 y_1 = u, \quad m_2 x_2 y_2 = u, \quad m_3 x_3 y_3 = u$$

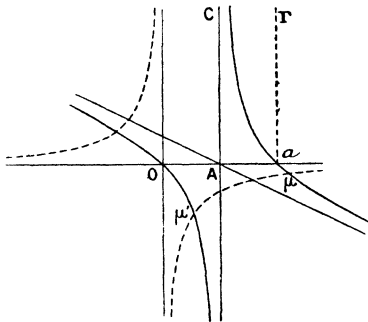
dont les coordonnées sont liées par la relation

$$y(2x-1) = x(1-x).$$

Le paramètre u dépend de l'inconnue D , diamètre du cercle inscrit dans le triangle, dont les bissectrices ω_1 , ω_2 , ω_3 sont données. En effet, nous avons posé

$$u = \frac{x_1 x_2 x_3}{D}.$$

Pour fixer les idées, nous avons supposé que x_1, x_2, x_3



sont des quantités positives, mais y_i et u peuvent avoir un signe quelconque. Pour u négatif, nous aurons l'hyperbole tracée par points sur la figure; les intersections

⁽¹⁾ Voir 3^e série, t. XIII, p. 28.

μ, μ' de cette courbe avec la courbe en trait continu

$$y(2x-1) = x(1-x)$$

peuvent être au delà des ordonnées AC, $a\Gamma$. Il est facile de justifier cette méthode : comme nous savons, il y a dans le triangle des cercles exinscrits ; si nous prenons le rayon d'un tel cercle avec le signe négatif, on peut, en conservant pour x_i les signes positifs, continuer la représentation géométrique du problème avec le paramètre négatif u .

Nous avons établi les équations

$$(1) \quad \begin{cases} m_1 D x_1(1-x_1) = 2x_1 x_2 x_3 - x_2 x_3, \\ m_2 D x_2(1-x_2) = 2x_1 x_2 x_3 - x_1 x_3 ; \end{cases}$$

la soustraction donne

$$m_1 D x_1(1-x_1) - m_2 D x_2(1-x_2) = (x_1 - x_2) x_3 ;$$

la relation d'Euler $x_3 = 2 - x_1 - x_2$ permet de faire la séparation de variables

$$m_1 D x_1(1-x_1) + x_1^2 - 2x_1 = m_2 D x_2(1-x_2) + x_2^2 - 2x_2,$$

et de même nous avons cette expression égale à

$$m_3 D x_3(1-x_3) + x_3^2 - 2x_3.$$

Ajoutant l'unité et chassant

$$m_i D_i x_i(1-x_i)$$

à l'aide des équations (1), désignons la valeur commune de

$$m_i D_i x_i(1-x_i) + (x_i-1)^2$$

par F,

$$F = 2x_1 x_2 x_3 + (x_1-1)^2 - x_2 x_3 \\ - \frac{1}{3} \left[6x_1 x_2 x_3 + \sum (x_1-1)^2 - \sum x_2 x_3 \right],$$

quantité par rapport aux racines de l'équation en t qui

(51)

peut être écrite

$$t(t-1)^2 + (\gamma-1)t - \frac{q}{z}(\gamma-1);$$

le coefficient γ est donné par la relation

$$(2q-z)(\gamma-1) = \frac{qx^2 - q + z}{4x^2},$$

mais

$$1 - x^2 = \frac{z}{x};$$

ainsi

$$(2q-z)(\gamma-1) = \frac{z(x-q)}{4x^3}.$$

De l'équation en t nous avons

$$\sum (x_1-1)^2 + 3(\gamma-1) - \frac{q}{z}(\gamma-1) \sum \frac{1}{x_1} = 0,$$

mais $\sum \frac{q}{z}(\gamma-1) \frac{1}{t} = \gamma,$

$$\sum (x-1)^2 + 3(\gamma-1) - \gamma = 0.$$

Ainsi, en se reportant aux relations

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{q}{z}(\gamma-1), \quad \sum x_2 x_3 = \gamma,$$

nous avons

$$F = \frac{2q}{z}(\gamma-1) - (\gamma-1) = \frac{x-q}{4x^3}.$$

Nous obtenons l'équation

$$m_1 D x_1 (1 - x_1) + (x_1 - 1)^2 = \frac{x - q}{4x^3}.$$

Comme $x = \frac{1}{D\sqrt{k}}, \quad k = m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1,$

$l = m_1 m_2 m_3, \quad q = \frac{l}{k^2},$ l'équation pour x_1 sera

$$(2) \quad m_1 D x_1 (1 - x_1) + (x_1 - 1)^2 - \frac{1}{4} D^2 (k - l D) = 0.$$

Pour x_2, x_3 nous aurons

$$m_2 D x_2 (1 - x_2) + (x_2 - 1)^2 - \frac{1}{4} D^2 (k - l D).$$

Ordonnant (2) par rapport à x_1 , nous avons

$$(1 - m_1 D) x_1^2 + (m_1 D - 2) x_1 + 1 - \frac{1}{4} D^2 (k - l D).$$

Introduisons à la place de x_1, x_2, x_3 ,

$$x_1 - 1 = D y_1, \quad x_2 - 1 = D y_2, \quad x_3 - 1 = D y_3,$$

nous aurons

$$-m_1 D^2 y_1 (1 + D y_1) + D^2 y_2^2 = \frac{1}{4} D^2 (k - l D);$$

en divisant par D^2 , nous aurons

$$(1 - m_1 D) y_1^2 - m_1 y_1 = \frac{1}{4} (k - l D),$$

$$[(1 - m_1 D) y_1 - \frac{1}{2} m_1]^2 = \frac{1}{4} [m_1^2 + (k - l D) (1 - m_1 D)];$$

il est facile de constater que

$$m_1^2 + k - (k m_1 + l) D + l m_1 D^2 \\ = (m_1 + m_2 - m_1 m_2 D) (m_1 + m_3 - m_1 m_3 D).$$

Introduisant pour un moment

$$a = \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}, \quad b = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}, \quad c = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

nous aurons

$$(1 - m_1 D) y_1 - \frac{1}{2} m_1 = \frac{1}{2} m_1 \sqrt{m_2 m_3} \sqrt{(D - b)(D - c)},$$

$$(1 - m_2 D) y_2 - \frac{1}{2} m_2 = \frac{1}{2} m_2 \sqrt{m_1 m_3} \sqrt{(D - c)(D - a)},$$

$$(1 - m_3 D) y_3 - \frac{1}{2} m_3 = \frac{1}{2} m_3 \sqrt{m_1 m_2} \sqrt{(D - a)(D - b)};$$

les inconnues y_i sont exprimées par les radicaux dans lesquels entrent trois facteurs $D - a, D - b, D - c$. Les quantités a, b, c ne peuvent être égales, sinon que deux quantités m_1, m_2, m_3 sont égales; et ces dernières sont différentes toujours si les données du problème $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ne sont pas égales; par exemple si $m_1 = m_2$, on a

$$\frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_1} = \frac{\omega_1 \omega_3}{\omega_2}, \quad \omega_1^2 = \omega_2^2.$$

Ainsi, le problème amène à la considération du polynôme du troisième degré $\sqrt{(D-a)(D-b)(D-c)}$.

Posons

$$dv = \frac{dD}{\sqrt{(D-a)(D-b)(D-c)}},$$

nous aurons

$$\sqrt{(D-b)(D-c)} = \frac{dD}{dv\sqrt{D-a}} = {}_2 \frac{d\sqrt{D-a}}{dv}.$$

Ainsi, nous aurons

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-m_1 D) y_1 - \frac{1}{2} m_1 = m_1 \sqrt{m_2 m_3} \frac{d\sqrt{D-a}}{dv}, \\ (1-m_2 D) y_2 - \frac{1}{2} m_2 = m_2 \sqrt{m_1 m_3} \frac{d\sqrt{D-b}}{dv}, \\ (1-m_3 D) y_3 - \frac{1}{2} m_3 = m_3 \sqrt{m_1 m_2} \frac{d\sqrt{D-c}}{dv}. \end{array} \right.$$

Si l'on fait $D-a = A\lambda^2$, A étant une constante que nous déterminerons après, on a

$$D-b = a-b + A\lambda^2, \quad D-c = a-c + A\lambda^2.$$

Supposons $a > b > c$, nous aurons l'avantage de prendre $A = b-a$, et désignant $\frac{a-b}{a-c}$ par k^2 , nous aurons

$$\begin{aligned} \sqrt{D-a} &= \sqrt{b-a} \lambda, \\ \sqrt{D-b} &= (a-b) \sqrt{1-\lambda^2}, \\ \sqrt{D-c} &= \sqrt{a-c} \sqrt{1-k^2 \lambda^2}. \end{aligned}$$

Les équations (3) donnent y_i et D comme fonctions elliptiques de la variable v . Faisons cette remarque, que les équations

$$(1-m_1 D) y_1^2 - m_1 y_1 - \frac{1}{4} (k-lD) = 0, \quad \dots$$

sont unicursales; et s'il fallait considérer une seule de ces équations, il n'y aurait aucune nécessité d'introduire des transcendentes. La résolution de la première amène

un radical portant sur un trinôme du second degré. Mais si l'on considère l'ensemble de trois équations, on est contraint de recourir aux transcendentes elliptiques.

On voit une réciprocité entre y_1 et $\sqrt{D-a}$. La première est fonction de $D-a$ et de sa dérivée; on peut constater qu'il en est de même de $\sqrt{D-a}$. Différentions l'équation

$$(1 - m_1 D) y_1^2 - m_1 y_1 - \frac{1}{4} (k - l D) = 0$$

par rapport à u , comme

$$2(1 - m_1 D) y_1' - m_1' = m_1 \sqrt{m_2 m_3} \sqrt{(D-b)(D-c)} = 2 m_1 \sqrt{m_2 m_3} \frac{d\sqrt{D-a}}{du},$$

on a

$$2 m_1 \sqrt{m_2 m_3} \frac{d\sqrt{D-a}}{du} \frac{dy_1}{du} + \left(\frac{1}{4} l - m_1 y_1^2 \right) \frac{dD}{du} = 0$$

ou bien, en éliminant y_1^2 ,

$$m_1 \sqrt{m_2 m_3} \frac{dy_1}{du} + \left\{ \frac{1}{4} l - \frac{m_1 [m_1 y_1 + \frac{1}{4} (k - l D)]}{1 - m_1 D} \right\} \sqrt{D-a} = 0,$$

réduisant le coefficient de $\sqrt{D-a}$ et divisant par le terme constant m_1 ,

$$\sqrt{m_2 m_3} \frac{dy_1}{du} - \frac{1}{4} \frac{m_1}{1 - m_1 D} (m_2 + m_3 + y_1) \sqrt{D-a} = 0.$$

En général, y_1 dépendent d'une équation différentielle du second ordre, mais cette équation, compliquée, ne nous apprend pas grand'chose sur le mode d'existence des y_1 . On a l'habitude, en discutant les cubiques planes (HALPHEN, t. II, p. 413), de prendre l'origine de coordonnées sur la courbe; rien de plus facile que de changer la variable D en x lié à D par la relation

$$k - l D = x.$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{m_1 k}{l} + \frac{m_1 x}{l}\right) y_1^2 - m_1 y_1 &= \frac{1}{4} x, \\ 2y_1 \left(1 - \frac{m_1 k}{l} + \frac{m_1 x}{l}\right) - m_1 &= \sqrt{m_1^2 + x \left(1 - \frac{m_1 k}{l} + \frac{m_1 x}{l}\right)}, \end{aligned}$$

mais les formules sont plus compliquées.

Pour compléter la discussion des formules, remarquons que les points donnés par les équations

$$(1 - m_1 D) y^2 - m_1 D y - F = 0,$$

$$(1 - m_2 D) y^2 - m_2 D y - F = 0,$$

$$(1 - m_3 D) y^2 - m_3 D y - F = 0,$$

si l'on représente les racines par les abscisses

$$y'_1, y''_1, y'_2, y''_2, y'_3, y''_3$$

d'une ligne droite, sont en involution. En effet, nous avons

$$m_1(m_2 - m_3) + m_2(m_3 - m_1) + m_3(m_1 - m_2) = 0.$$

Désignant les premiers membres des équations par A, B, C,

$$(m_2 - m_3)A + (m_3 - m_1)B + m_3(m_1 - m_2)C = 0.$$

Supposant C = 0, nous aurons

$$\begin{aligned} (m_2 - m_3)(1 - m_1 D)(y_3 - y'_1)(y_3 - y''_1) \\ + (m_3 - m_1)(1 - m_2 D)(y_3 - y'_2)(y_3 - y''_2) = 0, \end{aligned}$$

mais la présence de l'inconnue D empêche d'appliquer cette théorie : s'il n'y entrerait pas la variable D, alors cette équation permettrait de la prendre arbitraire sans que l'involution cessât d'exister. Et alors, de la nature des valeurs quelconques y_i , on pourrait conclure sur le mode d'existence de celles qui résolvent le problème, par exemple si l'équation donnant D, qui est d'un degré élevé, est irréductible ou non.